

Taslak

# Matematiksel Jeodezi II

Dr. Niyazi Arslan

Adana, 2021



## Dersle ilgili genel kriterler

|                                     |                                            |
|-------------------------------------|--------------------------------------------|
| Derse devam oranı:                  | %70                                        |
| Dersle ilgili sınavlar:             | 1 vize ve 1 final                          |
| Dersle ilgili ödevler:              | Anahtar kelimelere ilişkin araştırma ödevi |
| Haftalık ders saati:                | 2 saat teorik                              |
| Zorunluluk:                         | -                                          |
| <u>Yılsonu ortalama not hesabı:</u> |                                            |
| Vize ortalaması:                    | $(1.vize*0.75+1.ödev*0.25)$                |
| Yılsonu ortalama:                   | $Vize\ ortalaması*0.40+Final*0.60$         |
| Ödev paketi:                        | Araştırma                                  |
| Hedef yıl sonu geçme notu:          | -                                          |



## Dersin içeriği

- Vektörlerle ilgili temel bilgiler
- Yüzeyler ve eğriler
- Yüzeylerin Gauss parametreleri ile gösterilmesi
- I. ve II. Temel formlar
- Jeodezik eğrilik, Jeodezik eğri
- Küre yüzeyinde hesaplar
- Elipsoid yüzeyinde hesaplar



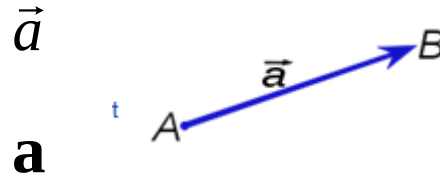
## Dersin içeriği

- Jeodezik temel ödevler
- Birinci temel ödev
- İkinci temel ödev
- Birinci ve ikinci jeodezik temel ödev çözüm yöntemleri (Elipsoit yüzeyinde)
- Birinci temel ödevin Legendre serisi ile çözümü
- İkinci temel ödevin Legendre serisi ile çözümü



## Vektörlerle ilgili temel bilgiler

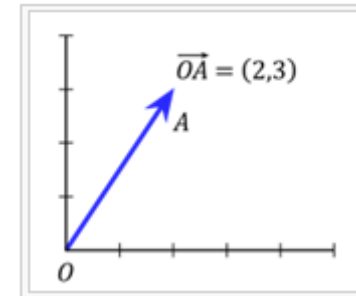
Vektör gösterimi



İki boyutta vektör gösterimi

$$\vec{a} = (2,3)$$

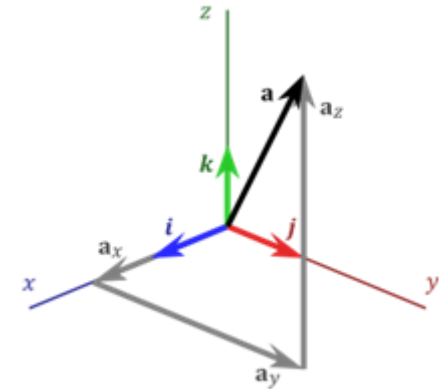
$$\mathbf{a} = (2,3)$$



Üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminde  $i_1, i_2, i_3$  birim vektörleri yerine  $i, j, k$  birim vektör gösterimi uygulanabilir

$$\vec{a} = (1,5,4)$$

$$\mathbf{a} = (1,5,4)$$



## Vektörlerle ilgili temel bilgiler

Vektörler farklı şekillerde gösterilmektedir. En sık kullanım şekli üzerinde bir ok işareti ( $\vec{a}$ ) ya da koyu harf ( $\mathbf{a}$ ) gösterimidir.

Sıralı n'li gösterim

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{i}_j$$

1.Y



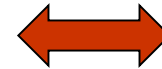
2.Y

Satır sütun matris gösterim

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

3.Y



4.Y

Birim vektör gösterimi

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + \dots + a_n \mathbf{i}_n$$

$$\mathbf{i}_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{i}_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

$$\mathbf{i}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

Einstein toplam uzlaşımı

$$j = (1, 2, \dots, n)$$



## Vektörlerle ilgili temel bilgiler

### İç çarpım:

İki vektör skaler çarpımla çarpılırsa bir vektör değil skaler bir değer elde edilir.

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + \dots + a_n \mathbf{i}_n$$

$$i_n i_m = \delta_{nm}, \quad n \neq m \text{ ise } \delta_{nm} = 0$$

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + \dots + b_m \mathbf{i}_m$$

$$n = m \text{ ise } \delta_{nm} = 1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad \Rightarrow$$

İki vektörün skaler çarpımı ya da iç çarpımı (Dot product)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + \dots + a_n \mathbf{i}_n) \cdot (b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + \dots + b_m \mathbf{i}_m)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_m$$

$\delta_{nm}$  ifadesi Kronocker delta fonksiyonudur



## Vektörlerle ilgili temel bilgiler

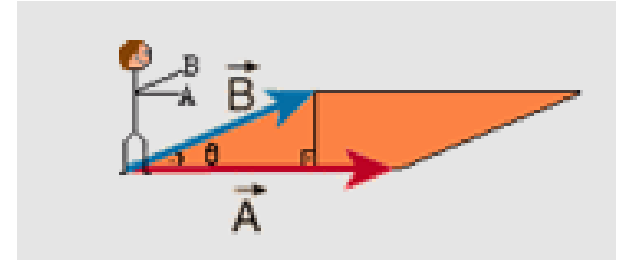
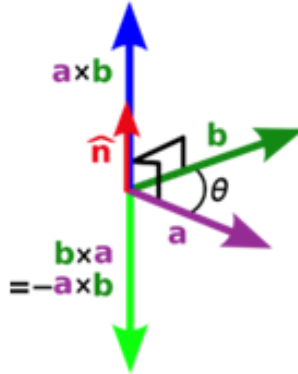
### Vektörel (Dış) Çarpım

Üç boyutlu iki vektörün çapraz çarpımı, bu iki vektörün tanımladığı düzleme dik üçüncü bir vektöre eşittir.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \text{İki vektörün vektörel yada dış çarpımı (Cross product)}$$

### Vektörel çarpımın matris gösterimi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$



Vektörel çarpım sonucunda elde ettiğimiz vektörün normu, vektörel çarpıma giren A ve B vektörlerinin üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşittir.



## Vektörlerle ilgili temel bilgiler

### Vektörün büyüklüğü (Normu)

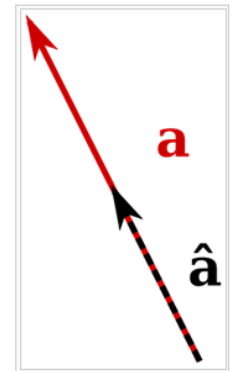
- Bir vektörün uzunluğu, büyüklüğü yada normu  $\|a\|$  yada  $|a|$  ile gösterilir.
- Bir vektörün normu birim vektör uzunluğu 1 olan vektördür.
- Normalde birim vektörler yön göstermek için kullanılır.
- Herhangibir uzunluğa sahip vektörün normuna bölünmesiyle elde edilir.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad \text{Bir vektörün normu}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{e}_1 + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{e}_2 + \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{e}_3 \quad \text{Birim vektör}$$

Vektörün normalleştirilmesi

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  Ortogonal birim vektörler



## Yüzeyler ve Eğriler

- Jeodezide temel formalar
  - Matematikte kullanılan 3 Temel (fundamental) form bulunmaktadır.
  - Bunlar sırasıyla I. , II. ve III. temel formlardır.
  - Jeodezide I. ve II. Temel formlar kullanılmaktadır.
  - Temel formlar bir yüzeye ilişkin büyüklükleri belirlemede oldukça kullanışlı ve önemlidir.
  - İki nokta arasındaki uzaklık
  - Alan elemanları
  - Normal eğrilik
  - Gauss eğriliği
  - Ortalama eğrilik



## Yüzeyler ve Eğriler

### Yüzeylerin Gauss parametreleri ile gösterilmesi

S yüzeyi, düzlemdeki kapalı B yüzeyinin Öklit uzayına sürekli izdüşümüdür.

$$S : B \rightarrow E^3$$

Bir yüzey

$$F(x, y, z)=0$$

$$z=f(x,y)$$

fonksiyonları ile tanımlanır.



## Yüzeyler ve Eğriler

### Yüzeylerin Gauss parametreleri ile gösterilmesi

S yüzeyindeki bir noktanın konumu, iki parametrenin  $(u, v)$  fonksiyonu olan  $x = x(u, v)$  ,  $y = y(u, v)$  ,  $z = z(u, v)$  koordinatları ile tanımlanır.

Noktanın yer vektörü  $\mathbf{r}(u, v)$  ile gösterilirse S yüzey parçası için,

$$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = x(u, v)\vec{\mathbf{i}} + y(u, v)\vec{\mathbf{j}} + z(u, v)\vec{\mathbf{k}}$$

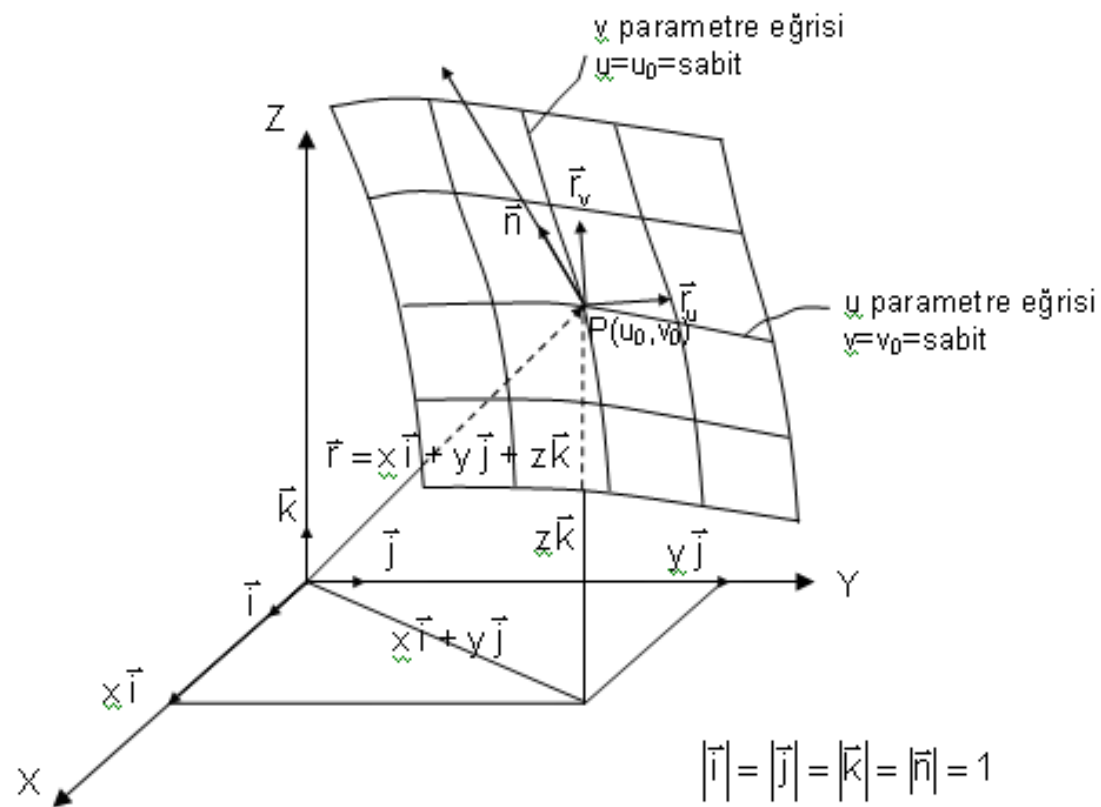
biçiminde yazılabilir.  $u, v$  değişkenlerine Gauss parametreleri adı verilir.

Elipsoit yüzeyinde nokta konumları için buradaki  $u, v$  parametreleri yerine  $\phi, \lambda$  enlem ve boylamları kullanılır.



## Yüzeyler ve Eğriler

- Yüzey üzerindeki  $P$  noktasını belirten koordinat sistemleri



## Yüzeyler ve Eğriler

Yüzeyin Gauss Parametreleri cinsinden ifadesi olan  $x = x(u, v)$  ,  $y = y(u, v)$  ,  $z = z(u, v)$  eşitliklerinin bir yüzey gösterebilmesi için fonksiyonel determinantlarının üçünün birden sıfır olmaması gerekir.

Fonksiyonel determinantlar

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X_u, \frac{\partial x}{\partial v} = X_v \quad \frac{\partial y}{\partial u} = Y_u, \frac{\partial y}{\partial v} = Y_v \quad \frac{\partial z}{\partial u} = Z_u, \frac{\partial z}{\partial v} = Z_v$$

kısaltmalarıyla

$$\begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Z_u & Z_v \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{vmatrix}$$

şeklinde verilebilir .



## Yüzeyler ve Eğriler

- Herhangi bir noktayı belirten  $u$  ve  $v$  değerleri fonksiyonel determinantların üçünü birden sıfır yapıyorsa, o noktaya yüzeyin singüler noktası denir.
- Bu noktalarda yüzeye teğet çizilmez.
- Örnek olarak bir koninin tepe noktası düşünülebilir.
- $P(u_0, v_0)$  noktasından  $u, v$  parametre eğrilerine çizilen teğetlerin vektörel denklemleri:

$$\vec{r}_u = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)_0 = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{k} = X_u \vec{i} + Y_u \vec{j} + Z_u \vec{k}$$

$$\vec{r}_v = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)_0 = \frac{\partial x}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \vec{k} = X_v \vec{i} + Y_v \vec{j} + Z_v \vec{k}$$



## Yüzeyler ve Eğriler

Yüzeyin normal vektörü

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

Yüzeyin birim normal vektörü

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

biçimindedir.  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$  çarpımında  $r_u$ 'dan  $r_v$ 'ye en kısa yol saat ibresinin tersi istikametinde olmalıdır.



## Yüzeyler ve Eğriler

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \sin \alpha = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_{u_x} & r_{u_y} & r_{u_z} \\ r_{v_x} & r_{v_y} & r_{v_z} \end{vmatrix}$$

Çarpımının normu  $r_u$  ve  $r_v$  vektörlerinin oluşturduğu paralel kenarın alanına eşit olan bir vektör verir.

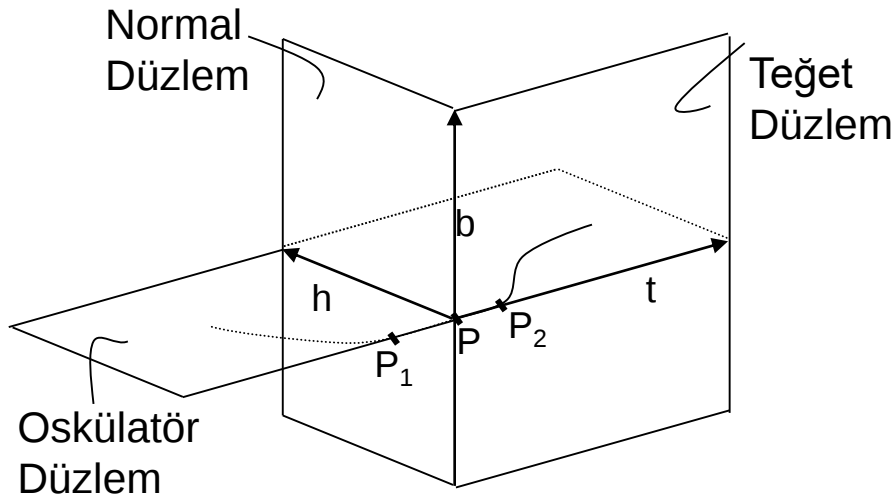
$$(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{N} = \vec{r}_u \cdot (\vec{r}_v \times \vec{N})$$

Üç vektörün oluşturduğu prizmanın hacmine eşit bir sayı verir.



## Yüzeyler ve Eğriler

Üç boyutlu dik koordinatlar  $T$  gibi tek bir değişkene bağlı ise  $X=X(T)$ ,  $Y=Y(T)$ ,  $Z=Z(T)$  denklemleri bir uzay eğrisi gösterirler.



$$|t|=|h|=|b|=1$$

- $\vec{t}$  Teğet vektör
- $\vec{h}$  Asal normal vektör
- $\vec{b}$  Binormal vektör

Birbirlerine dik olan  $t$ ,  $h$  ve  $b$  vektörlerinin oluşturduğu üç yüzlüye “FRENET” veya “EK ÜÇLÜ” adı verilir.



## Yüzeyler ve Eğriler

- Uzak eğrisi üzerinde birbirine çok yakın P1, P ve P2 noktalarından geçen düzleme “oskulator” düzlem denir
- Eğrinin P noktasındaki t teğetini içeren, oskulator düzleme dik düzleme teğet düzlem denir
- Teğet ve oskulator düzlemlere dik düzleme de normal düzlem denir.
- Normal ve oskulator düzlemlerin arakesitine asal normal adı verilir.
- Teğet ve normal düzlemlerin arakesitine de binormal adı verilir.

Değişken olarak T yerine S yay uzunluğu alındığında eğri denklemi

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

Eğri denkleminin S yay uzunluğuna göre türevi teğet birim vektördür.



## Yüzeyler ve Eğriler

Teğet birim vektörün denklemi (t)

$$\vec{t} = \vec{r}' = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{dX(s)}{ds} \vec{i} + \frac{dY(s)}{ds} \vec{j} + \frac{dZ(s)}{ds} \vec{k}$$

Asal normal birim vektörünün denklemi (h)

$$h = \frac{\vec{t}'}{|\vec{t}'|} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|} = \frac{\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}}{\left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|} = \frac{\frac{d^2X}{ds^2} \vec{i} + \frac{d^2Y}{ds^2} \vec{j} + \frac{d^2Z}{ds^2} \vec{k}}{\sqrt{\left( \frac{d^2X}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2Y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2Z}{ds^2} \right)^2}}$$



## Yüzeyler ve Eğriler

Binormal birim vektörün denklemi (b)

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{h} = \vec{t} \times \frac{\vec{t}'}{|\vec{t}'|} = \vec{r}' \times \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}''|}$$



## Yüzeyler ve Eğriler

### I. Temel form

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \qquad \vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

### II. Temel form

$$II = \bar{L}du^2 + 2\bar{M}dudv + \bar{N}dv^2$$

$$\bar{L} = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n}, \quad \bar{M} = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n}, \quad \bar{N} = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n}$$

Birinci temel form, bir yüzeyin metrik özelliklerini tamamen tanımlar. Böylelikle yüzeydeki eğrilerin uzunlukları ve yüzeydeki bölgelerin alanlarının hesaplanmasını sağlar. Çizgi elemanı  $ds$ , ilk temel formun katsayıları cinsinden ifade edilebilir:



## Yüzeyler ve Eğriler

### I. Temel form açık gösterim

Gauss parametreleriyle gösterilen yüzey üzerinde birbirine çok yakın iki nokta arasındaki **ds yay uzunluğu**

$ds^2=dx^2+ dy^2+ dz^2$  eşitliğinde  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  yerine eşitleri konarak:

$$x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$$

$$dx^2=(X_u du+X_v dv)^2, \quad dy^2=(Y_u du+Y_v dv)^2, \quad dz^2=(Z_u du+Z_v dv)^2$$

$$ds^2=(X_u^2+Y_u^2+Z_u^2)du^2+2(X_u X_v+Y_u Y_v+Z_u Z_v)dudv+(X_v^2+Y_v^2+Z_v^2)dv^2$$

$$E=X_u^2+Y_u^2+Z_u^2, \quad G= X_v^2+Y_v^2+Z_v^2 \text{ ve } F=X_u X_v+Y_u Y_v+Z_u Z_v$$

E, G, F kısaltmalarıyla 1. Temel Form elde edilir:

$$ds^2=E du^2+2F dudv+G dv^2$$



## Yüzeyler ve Eğriler

Yüzey eğrisinin P ve P' noktaları arasındaki uzunluğu  
(jeodezik eğri)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} dt$$



## Yüzeyler ve Eğriler

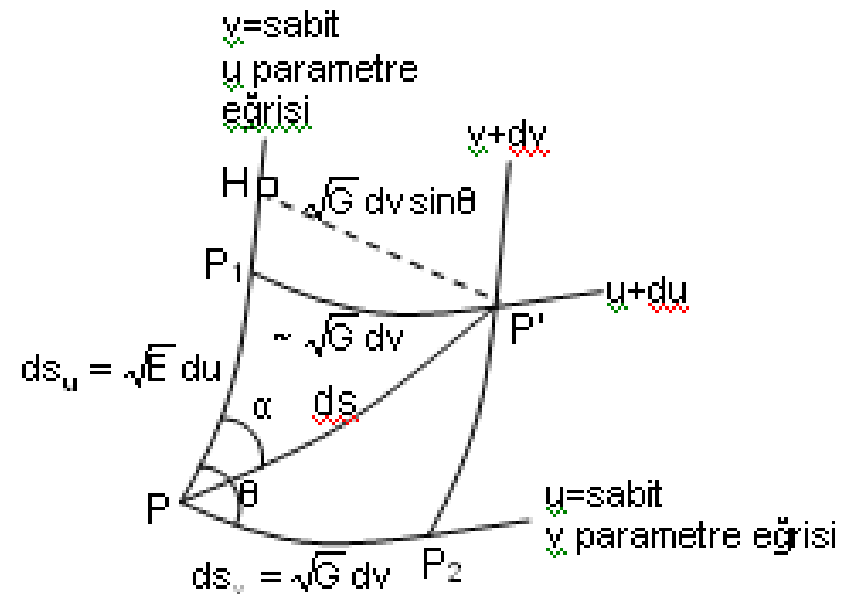
### Eğriler Arasındaki Açı

$v$  parametre eğrileri üzerinde  $u=\text{sabit}$  olduğundan  $du=0$ ,  
 $u$  parametre eğrileri üzerinde  $v=\text{sabit}$  olduğundan  $dv=0$  olur

$$ds_v = \sqrt{G} dv$$

$$ds_u = \sqrt{E} du$$

Eğriler arasındaki  $\theta$  açısı,  $P$  noktasında  $r_u$  ve  $r_v$  teğet vektörleri arasındaki açıya eşittir.



## Eğriler Arasındaki Açı

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_u| |\vec{r}_v| \cos \theta \quad \cos \theta = \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v}{|\vec{r}_u| |\vec{r}_v|}$$

$u \perp v$  olabilmesi için  $\theta = 90^\circ$  ve  $\cos \theta = 0$  olmalıdır.

Bu durum ise  $F=0$  olması ile mümkündür.

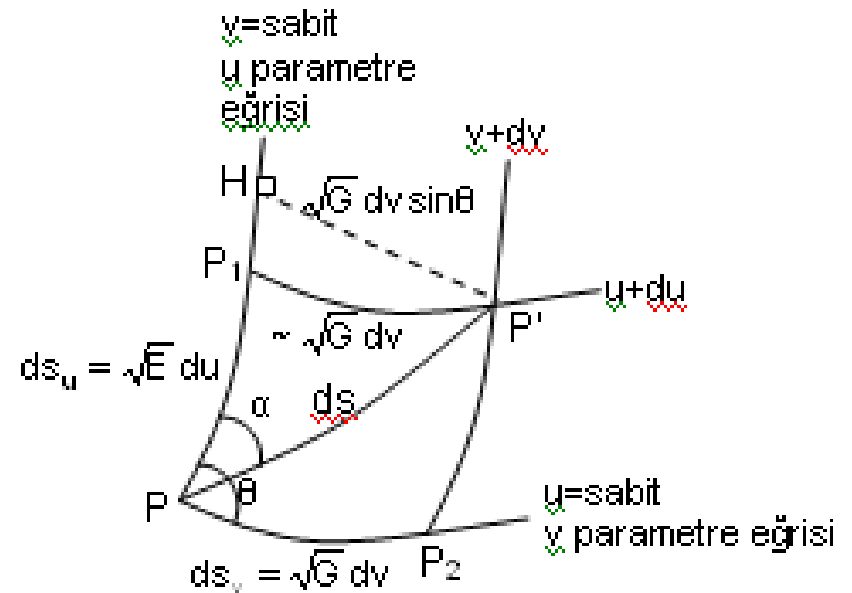
Bu ifadeler 1. derece temel büyüklükler cinsinden yazılırsa

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}, \quad \tan \theta = \frac{W}{F}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{F^2}{EG}}, \quad W = \sqrt{EG - F^2}$$

Burada  $W$ 'ya 1. Temel Formun diskriminantı adı verilir.

## Yüzeyler ve Eğriler



## Yüzeyler ve Eğriler

### Eğriler Arasındaki Açı

u parametre eğrisi ile ds yayı arasındaki  $\alpha$  açısını bulmak için söz konusu üçgenler küçük olduklarından düzlem üçgen biçiminde alınabilirler. Yani

$$\sin\alpha = \frac{HP'}{PP'} = \frac{\sqrt{G} dv \sin\theta}{ds} \quad \cos\alpha = \frac{PP_1 + P_1H}{PP'} = \frac{\sqrt{E} du + \sqrt{G} dv \cos\theta}{ds}$$

olur.  $\sin\theta$  ve  $\cos\theta$  bir önceki eşitliklerdeki karşılıkları konulursa;

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{G} dv}{ds} \frac{W}{\sqrt{EG}} = \frac{W dv}{\sqrt{E} ds} \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{E} du + \sqrt{G} dv \frac{F}{\sqrt{EG}}}{ds} = \frac{E du + F dv}{\sqrt{E} ds}$$



$$\tan\alpha = \frac{W dv}{\sqrt{E} ds} \frac{\sqrt{E} ds}{(E du + F dv)} = \frac{W dv}{E du + F dv}$$



PP<sub>1</sub>P'P<sub>2</sub> noktalarının oluşturduğu paralel kenarın alanı yüzey alan elemanlarına eşittir:

$$df = PP_2 \times H'P_1 = ds_v ds_u \sin\theta = \sqrt{G} dv \sqrt{E} du \cdot \frac{W}{\sqrt{EG}}$$

$$df = W du dv$$

$$W = \sqrt{EG - F^2} \quad \Rightarrow \quad \text{I. Temel formun diskriminantı}$$



## Yüzeyler ve Eğriler

### Eğriler Arasındaki Alan

PP<sub>1</sub>P'<sub>2</sub> noktalarının oluşturduğu paralel kenarın alanı yüzey alan elemanlarına eşittir:

$$df = PP_2 \times H'P_1 = ds_v ds_u \sin\theta = \sqrt{G} dv \sqrt{E} du \cdot \frac{W}{\sqrt{EG}}$$

$$df = W du dv$$

$$W = \sqrt{EG - F^2} \quad \Rightarrow \quad \text{I. Temel formun diskriminantı}$$



## Yüzeyler ve Eğriler

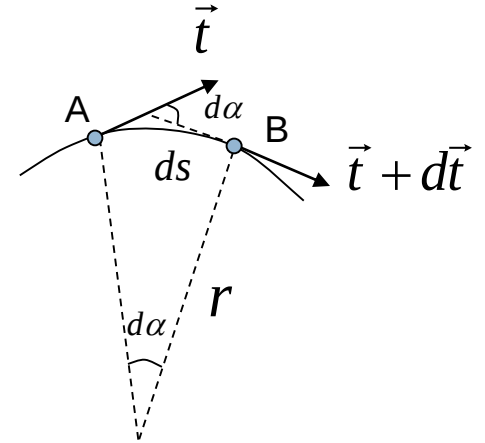
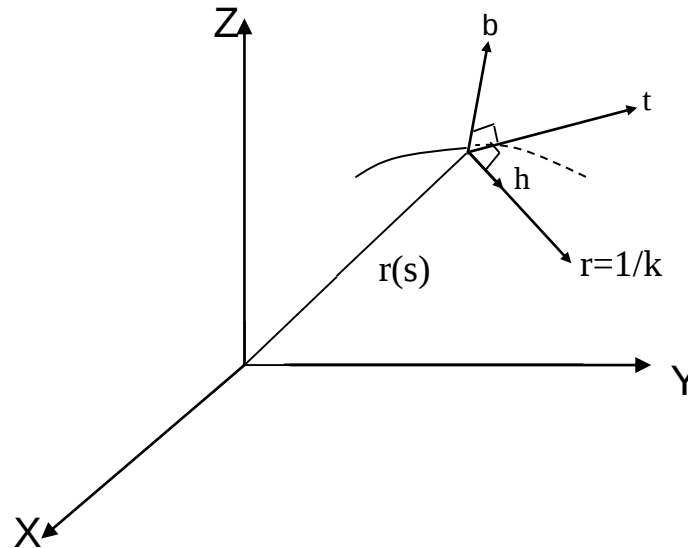
### Eğrilik ve eğrilik yarıçapı

Eğriliğin geometrik yorumun yapabilmek için eğri üzerinde birbirine diferansiyel anlamda yakın iki nokta alınır. Eğri üzerindeki bir noktaya çizilen teğetten uzaklaşma miktarı  $k$  eğriliği ile tanımlanır. Oskülator düzlemi içinde  $d\alpha$ 'nın  $ds$ 'ye oranı eğriliktir. Diğer bir ifadeyle **eğrilik yarıçapı**nın tersidir.

$$k = \frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds}$$

$k$ =Eğrilik

$r$ =Eğrilik yarıçapı



## Yüzeyler ve Eğriler

### Torsiyon

Burulma ya da torsiyon (2. eğrilik)  $\tau$  ile tanımlıdır. Bir uzay eğrisinin oskülatör düzleminden ayrışılını ya da ondan sapma miktarını göstermektedir. Bir düzlem eğrinin burulması sıfıra eşittir.

$$\tau = \frac{d\varepsilon}{ds}$$



## Yüzeyler ve Eğriler

- Normal eğrilik, Normal eğrilik yarıçapı
- $u, v$  parametre eğrilerinin  $r_u, r_v$  teğet vektörleri ile  $n$  birim normal vektörü parametre ağının düzenli her noktasında Gauss üçlüsü adı verilen bir üçlü oluşturur (Demirel ve Üstün, 2010).
- Genel olarak  $x_u, x_v$  teğet vektörleri birbirine dik değildir.
- Yalnız ortogonal parametre ağlarında bu vektörler birbirine diktir.
- Aynı zamanda birim vektör de değildir.
- Bir yüzey noktasındaki eğriliği bulmak için II. temel form I. temel forma bölünür.

Bu şekilde Meusnier formülü elde edilir



## Yüzeyler ve Eğriler

### Normal eğrilik, Normal eğrilik yarıçapı Meusnier formülü

$$\frac{II}{I} = k \cos \delta = k_n = \frac{1}{R_n}$$

↓

Eşitlikte  $k$  koy  $k = \frac{1}{r}$

→  $r = R_n \cos \delta$

↓

Normal eğrilik yarıçapı

→ Yüzey eğrisi normali ile yüzey normali arasındaki açıdır

**Normal kesit (Düşey kesit):** teğet vektör ve yüzey normalini içeren düzlemin yüzey ile arakesitidir

**Normal eğrilik:** Normal kesit eğrisinin eğriliğine denilmektedir ( $k_n$ ). Normal eğriliğin **en büyük ve en küçük** olduğu iki doğrultu vardır.

**Asal eğrilik doğrultuları:** Bu iki doğrultuya verilen addır.

**Asal eğrilikler:** Bu iki doğrultunun eğriliğidir ( $k_1$  ve  $k_2$ ).

**Asal eğrilik yarıçapı:**  $k_1$  ve  $k_2$ 'ye ilişkin yarıçaplardır ( $R_1$  ve  $R_2$ )



## Asal eğrilikler

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = H - \sqrt{H^2 - K}$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}$$

$$R_G = \frac{1}{\sqrt{K}} = \sqrt{R_1 R_2}$$

## Yüzeyler ve Eğriler

➔ Normal eğriliğin en büyük bileşeni (Asal eğrilik)

➔ Normal eğriliğin en küçük bileşeni (Asal eğrilik)

➔ Ortalama eğrilik

➔ Gauss eğriliği

➔ Gauss eğrilik yarıçapı



## Yüzeyler ve Eğriler

### Elipsoit yüzeyinde I. ve II. Temel büyüklükler

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

$$I = ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda$$

$\mathbf{r}$  konum vektöründeki  $u$  yerine elipsoit yüzeyindeki  $\varphi$  enlemi,  $v$  yerinde  $\lambda$  değerleri girilip gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$E = M^2$$

$$F = 0$$

$$G = N^2 \cos^2 \varphi$$



## Yüzeyler ve Eğriler

### Elipsoit yüzeyinde I. ve II. Temel büyüklükler

$ds$  eğri elemanının  $\phi$  eğrisi ( $\lambda = \text{sabit}$ ) ile yaptığı açı ( $\alpha$ )

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{G}d\lambda}{\sqrt{E}d\phi} = \frac{N \cos \phi}{M} \frac{d\lambda}{d\phi} = \frac{ds_\lambda}{ds_\phi}$$

ve parametre eğrilerinin yay elemanları

$$ds_\lambda = \sqrt{G}d\lambda = N \cos \phi d\lambda$$

$$ds_\phi = \sqrt{E}d\phi = M d\phi$$

Yüzey alan elemanı

$$dF = ds_\phi ds_\lambda \sin \theta = MN \cos \phi d\phi d\lambda \quad \theta = \pi / 2$$



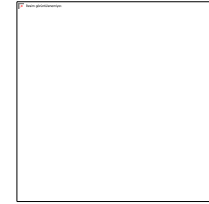
$$\bar{L} = M$$

$$\bar{M} = 0$$

$$\bar{N} = N \cos^2 \varphi$$

2. Temel form

$$II = M d\varphi^2 + N \cos^2 \varphi d\lambda^2$$



## Elipsoit yüzünün eğrilikleri

$$A = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{M} \quad \text{En büyük normal eğrilikler (asal eğrilik)}$$

$$A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{N} \quad \text{En küçük normal eğrilikler (asal eğrilik)}$$

## Yardımcı formüller

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \quad M = \frac{c}{V^3} \quad N = \frac{c}{V}$$

Normal eğrilik yarıçaplarından en küçüğü meridyen doğrultusundaki  $R_1 = M$

Normal eğrilik yarıçaplarından en büyüğü ona dik doğrultudaki  $R_2 = N$



## Elipsoit yüzünün eğrilikleri

### Asal eğrilikler

$$A = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{k_1} = M \quad \Rightarrow \quad \text{En küçük asal eğrilik yarıçapı}$$

$$A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_2 = \frac{1}{k_2} = N \quad \Rightarrow \quad \text{En büyük asal eğrilik yarıçapı}$$

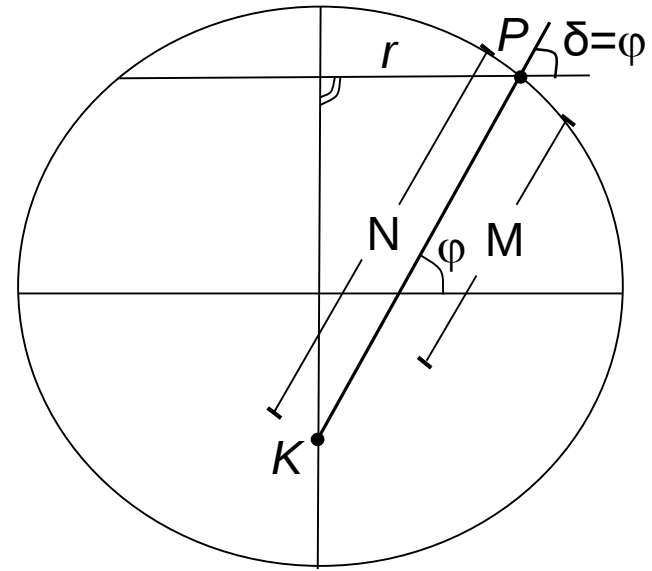
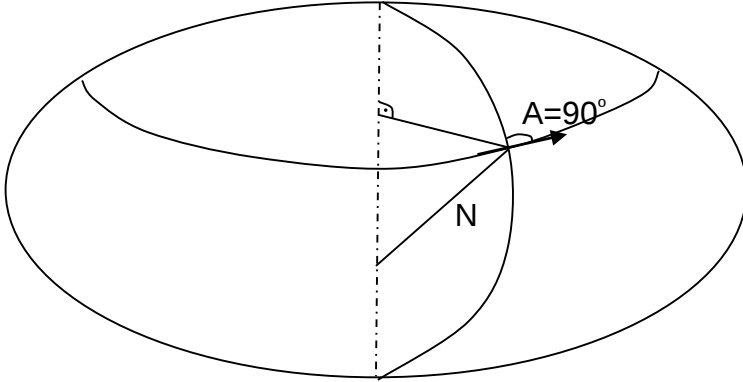
$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) \quad \Rightarrow \quad \text{Ortalama eğrilik}$$

$$K = \frac{1}{MN} = \frac{V^4}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Gauss eğriliği}$$

$$R_G = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Gauss eğrilik yarıçapı}$$



## YÜZEYLER ve EĞRİLER



M, N asal eğrilik yarıçapları



- Küre Yüzeyinde Hesaplamalar
  - Hesaplamalara ilişkin temel eşitlikler
  - Legendre yöntemiyle üçgen çözümü
  - İki kenarı ve arasındaki açı verilen üçgen çözümü
  - Ekleme yöntemiyle Üçgen Çözümü
  - Jeodezik dik koordinatlarla I. temel ödev çözümü
  - Jeodezik dik koordinatlarla II. Temel ödev çözümü
  - Küre yüzeyinde ilerden kestirme hesabı
  - Küre yüzeyinde geriden kestirme hesabı



## Uygulamalar

Elipsi tanımlayan farklı enlem türlerine ilişkin uygulamalar

- Elipsi tanımlayan enlem türlerine ilişkin temel eşitlikler
- Jeodezik enlem parametre alındığında dik koordinatlar
- Merkez enlemle elipsin belirlenmesi
- İndirgenmiş enlemle jeodezik enlem arasında dönüşüm ( $\psi, \varphi$ )
- Merkez enlemle jeodezik enlem arasında dönüşüm ( $\gamma, \varphi$ )
- İndirgenmiş enlemle merkez enlem arasında dönüşüm ( $\psi, \gamma$ )



## Uygulamalar

Coğrafi koordinatlardan dik koordinatlara dönüşüm Fiziksel yeryüzündeki bir noktanın dik koordinatları; jeodezik enlem, boylam ve elipsoit yüksekliği cinsinden ifade edilirse

$$x = \left( \frac{a}{W} + h \right) \cos \varphi \cos \lambda \quad y = \left( \frac{a}{W} + h \right) \cos \varphi \sin \lambda \quad z = \left( (1 - e^2) \frac{a}{W} + h \right) \sin \varphi$$

Elipsoit yüzünde  $h=0$  olduğundan aynı eşitlikler

- Coğrafi enlem ve boylam cinsinden ifade edilirse

$$x = \frac{a \cos \varphi}{W} \cos \lambda = \frac{c \cos \varphi}{V} \cos \lambda$$

$$z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{W} = \frac{c \sin \varphi}{V(1 + e'^2)}$$

$$y = \frac{a \cos \varphi}{W} \sin \lambda = \frac{c \cos \varphi}{V} \sin \lambda$$



## Uygulamalar

- İndirgenmiş enlem ve boylam cinsinden ifade edilirse;

$$x = a \cos \psi \cos \lambda ; y = a \cos \psi \sin \lambda ; z = b \sin \psi$$

- Merkez enlem ve boylam cinsinden ifade edilirse

$$x = G \cos \gamma \cos \lambda ; y = G \cos \gamma \sin \lambda ; z = G \sin \gamma$$



## Uygulamalar

### Dik koordinatlardan coğrafi koordinatlara dönüşüm

Fiziksel yeryüzündeki bir noktanın jeodezik enlem, boylam ve elipsoit yüksekliği dik koordinatları cinsinden ifade edilirse ilk değerler için  $h=0$  ve  $\varphi=0$  alınır.

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - N$$

$$\varphi = \arctan \frac{z (N + h)}{\sqrt{x^2 + y^2} [(1 - e^2)N + h]}$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}$$



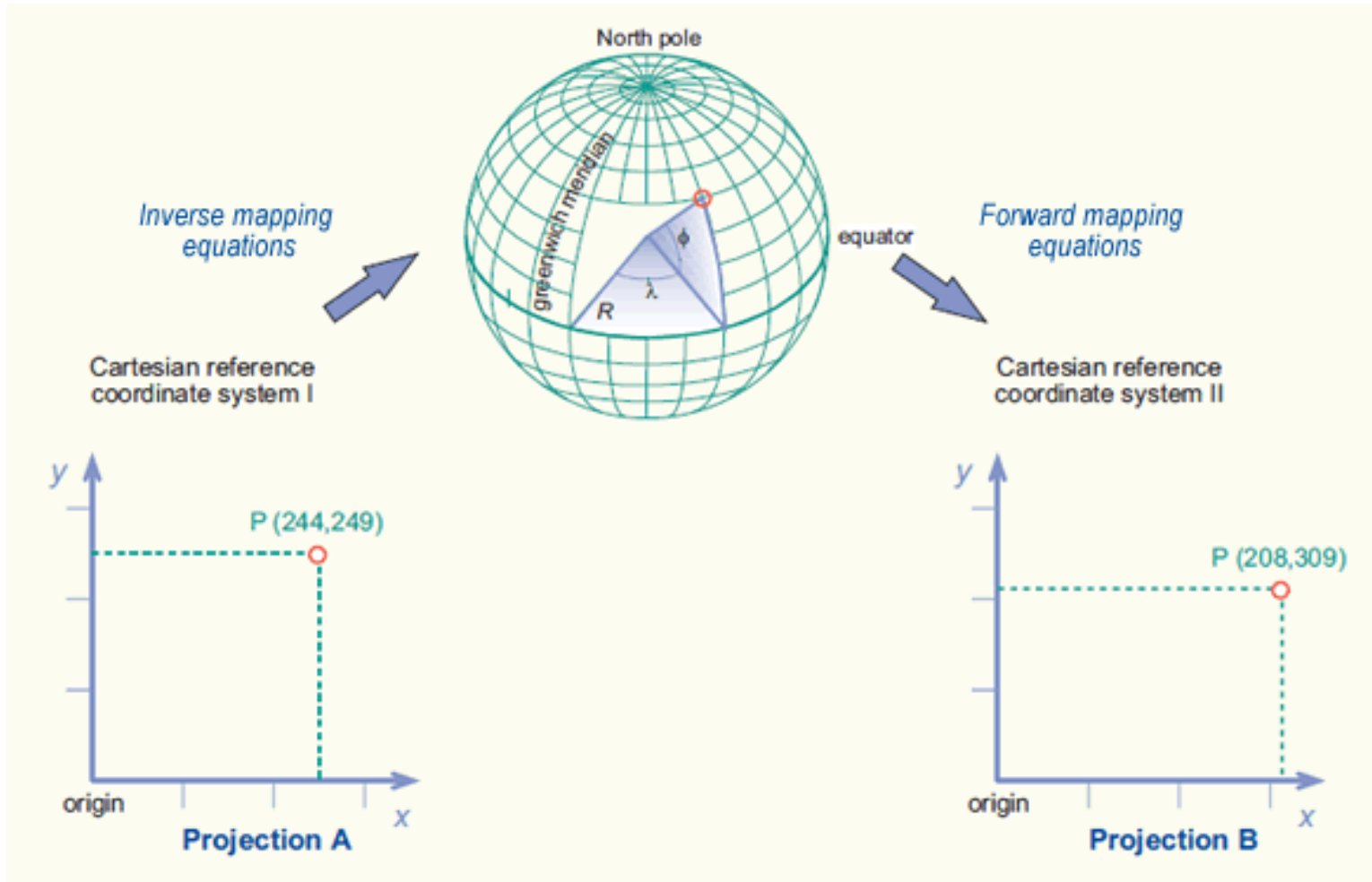
# Jeodezide kullanılan dönüşümler



## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

- Harita projeksiyonunun değişimi (projeksiyon türü biliniyor)
- Bir noktanın bir harita projeksiyonundaki koordinatlarından, diğer bir harita projeksiyonundaki koordinatlarını bulabilmek için yapılacak koordinat dönüşümünde öncelikle:
  1. Ters projeksiyon fonksiyonu ile kaynak projeksiyon koordinatlarından  $(x,y)$  coğrafik koordinatlara dönüşüm yapılır.
  2. Sonra ilgili projeksiyondaki ileri projeksiyon denklemleri kullanılarak coğrafik koordinatlardan hedef projeksiyon koordinatları  $(x',y')$  kullanılır.
- Böylece A projeksiyonundan B projeksiyonuna geçilir.





Şekil Projeksiyon denklemleri kullanarak bir projeksiyondan diğerine geçiş

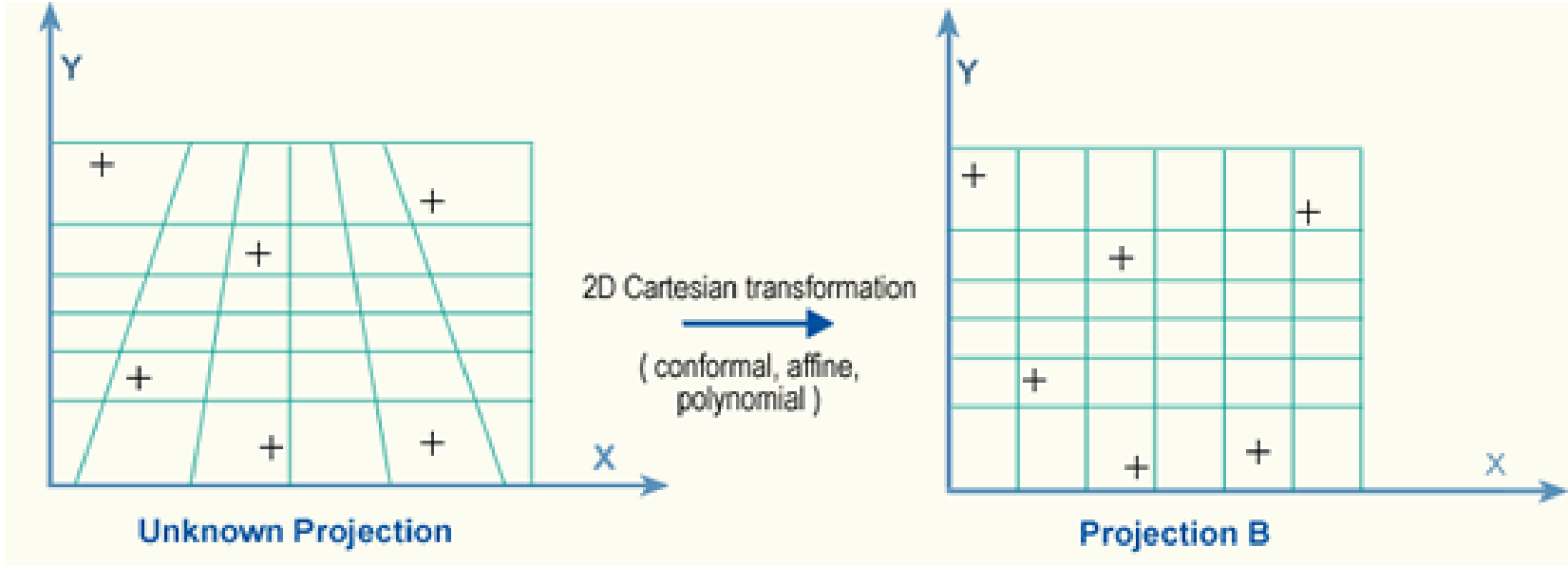


## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

- Harita projeksiyonunun değişimi (projeksiyon türü bilinmiyor)
- Projeksiyon değişimini yaparken, projeksiyon denklemini kullanmak için girdi verinin koordinat sistemini (harita projeksiyonu) bilmek gerekir.
- Eğer girdi verinin koordinat sistemini bilmiyorsak, 2 boyutlu Kartezyen dönüşümü kullanılabilir.
- 2 boyutlu yer kontrol noktaları ya da ortak noktalar gereklidir.
- Konform, Afin, Polinomsal ya da daha farklı dönüşüm yöntemi kullanılabilir.



## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler



Şekil Projeksiyonu bilinmeyen koordinat sisteminden projeksiyonu bilinen bir koordinat sistemine dönüşüm



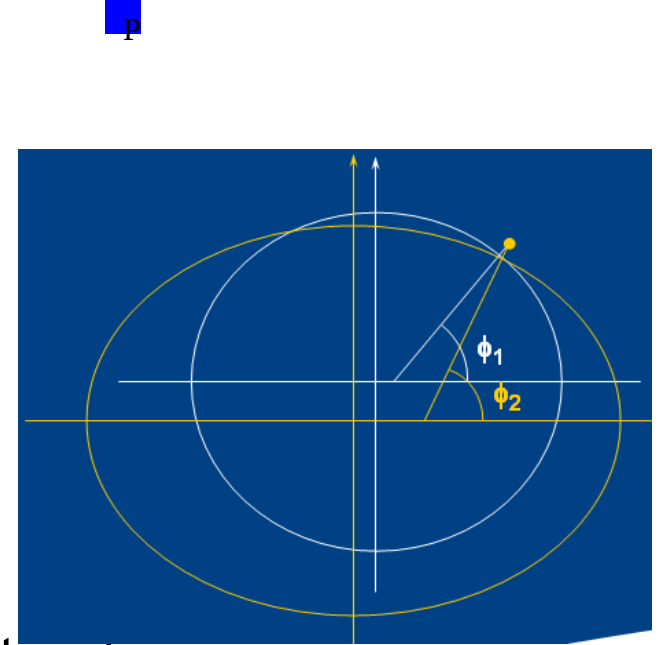
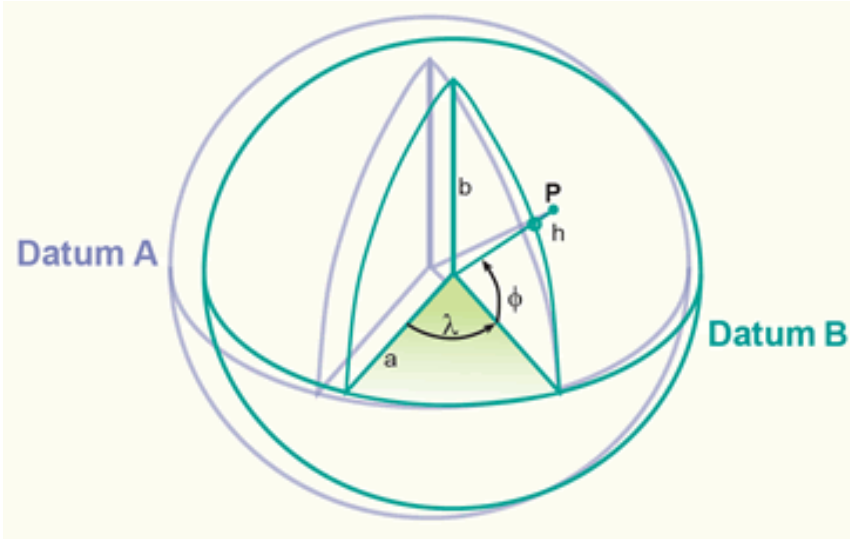
## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

- **Datum dönüşümleri**
- Harita projeksiyonunun değişimi, kimi durumlarda yatay datumun değişimini (jeodezik datum) içermektedir.
- Bu durum kaynak projeksiyonunun hedef projeksiyondan farklı yatay datuma dayandığı durumlarda gerçekleşir.
- Farklı datumlara sahip paftalar çakışmazlar.
- Farklı datumlarda aynı bir noktaya ilişkin koordinatlar arasında 100'lerce metreye kadar farklar oluşur.
- Bu nedenle datum birliği gerekir.
- Datum dönüşümü 3 boyutlu bir koordinat sisteminden diğer bir 3 boyutlu koordinat sistemine dönüşümdür.



## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

$$\varphi_1 \neq \varphi_2$$

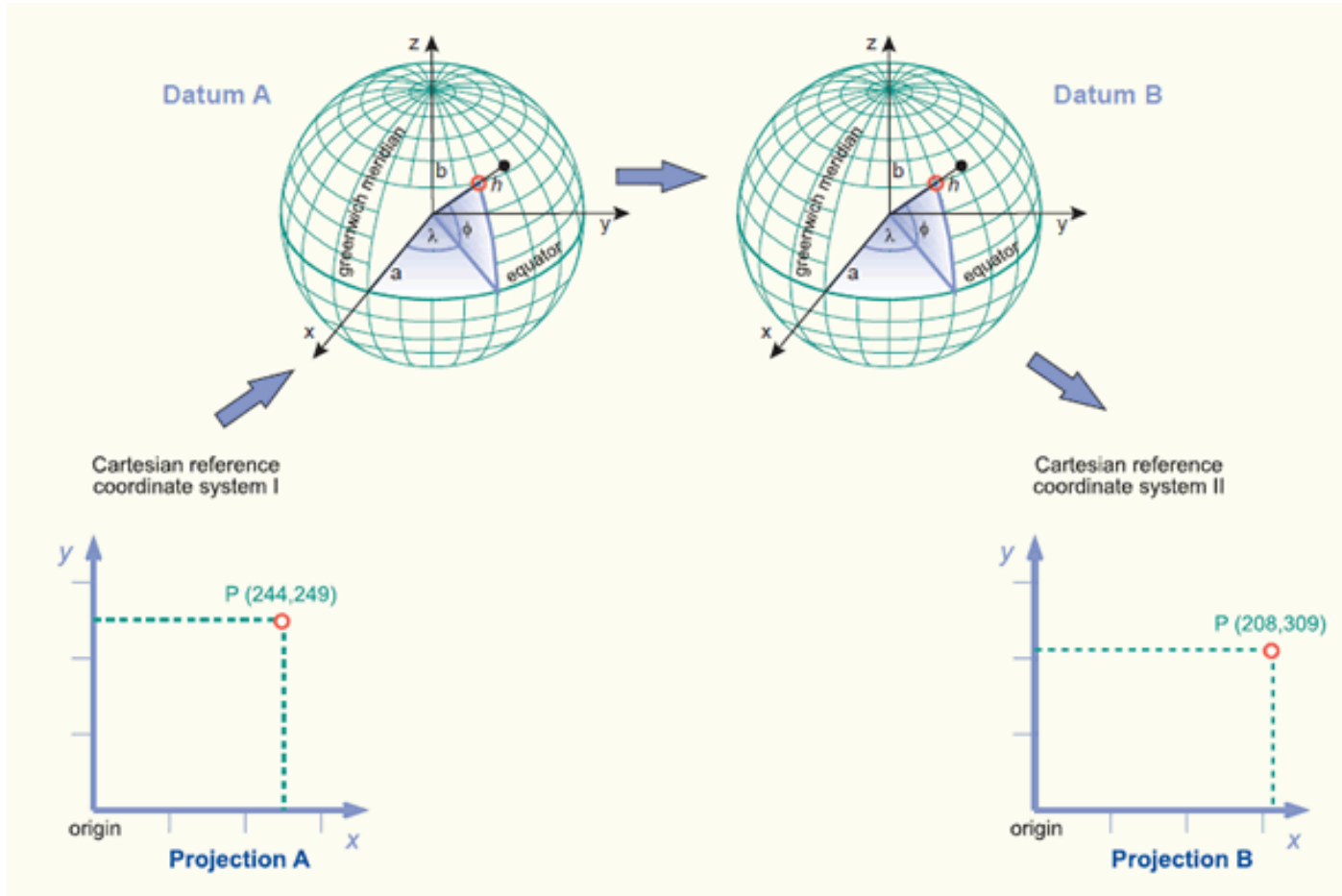


Şekil İki jeodezik datum arasında datum kaymasının  
**a.** 3 boyutlu ve **b.** 2 boyutlu gösterimi



## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

$$\varphi_1 \neq \varphi_2$$



Datum A'dan Datum B'ye datum dönüşüm ile ilişkilendirilen  
A projeksiyonundan B projeksiyonuna dönüşüm



## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

- Örneğin UTM projeksiyonundan Hollanda RD sistemine dönüşüm yapmak istediğimizi düşünelim.
- UTM projeksiyonu ED50 datumunda; Hollanda sistemi Amersfoort datumundadır.
- A projeksiyonunun ters projeksiyon denklemi, bizi A projeksiyonundaki harita koordinatlarından  $(x,y)$ , A datumundaki coğrafi koordinatlara götürür.
- Sonra, datum dönüşümü bizi A datumundaki coğrafi koordinatlardan , B datumundaki coğrafi koordinatlara götürür.
- Sonuç olarak, B projeksiyonu ileri denklemleri bizi B datumundaki coğrafi koordinatlardan , B projeksiyonu harita koordinatlarına  $(x',y')$  götürür.
- Yükseklik koordinatı (h ya da H) coğrafi koordinatlara eklenebilir.



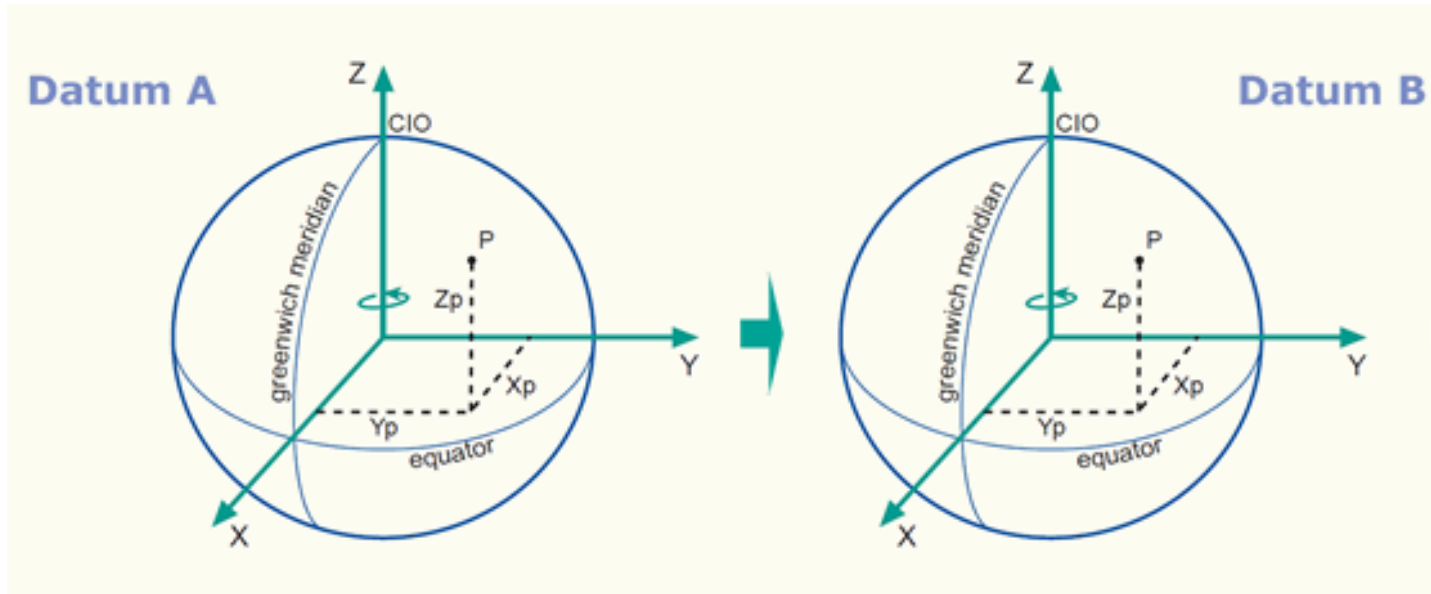
## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

- Dönüşüm parametreleri her iki datum sistemindeki koordinatı bilinen ortak noktalar kullanılarak belirlenir.
- Bu noktaların koordinatları doğru bir biçimde belirlenmemişse dönüşüm doğru olmaz (inaccurate).
- Genelde bu durum yerel yatay datumlardan global jeosentrik datuma dönüşümde geçerlidir.
- Yerel yatay datumun tanımında kullanılan nirengi ağlarındaki ölçülerin doğru olmaması, seçilen ortak noktalara, dönüşüm parametrelerinin değerlerine bağlıdır.
- Matematiksel olarak datum dönüşümü
- Ya Coğrafi koordinatları doğrudan iki datum arasında
- Ya da dolaylı olarak iki datumdaki jeosentrik koordinatlarla  $(x,y,z)$  arasında yapılır.



## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

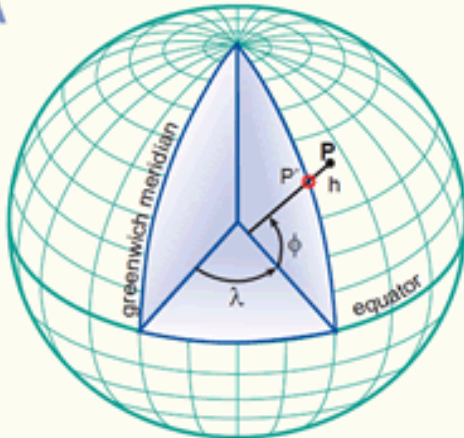
- Jeosentrik koordinatlarla datum dönüşümleri
- Jeosentrik koordinatlarla  $(x,y,z)$  datum dönüşümleri 3 boyutlu benzerlik dönüşümüdür
- 3 boyutlu jeosentrik koordinatlarla datum dönüşümünde en çok uygulanan 3 yöntem şunlardır.
- Jeosentrik öteleme (Geocentric translation)
- Helmert 7-parametrelili dönüşüm
- Molodensky-Badekas 10-parametrelili dönüşüm



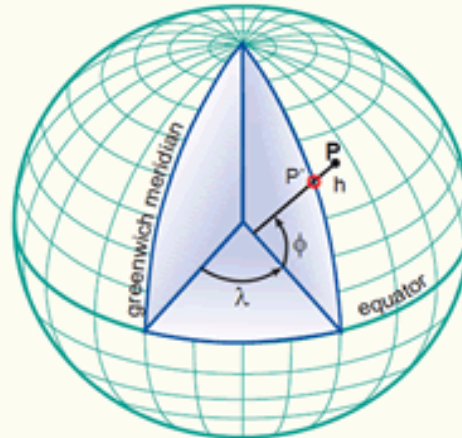
## Jeodezide Kullanılan Dönüşümler

- Coğrafi koordinatlarla datum dönüşümleri
- Coğrafik koordinatlar kullanılarak yapılan datum dönüşümünde her iki datumun enlem, boylam
- ve çoğunlukla elipsoit yüksekliği için içine girmektedir
- 3 boyutlu coğrafik koordinatlar kullanılarak yapılan
- datum dönüşümlerinde uygulanan yöntemler
- Coğrafik kayma (geographic offsets)
- Molodensky ve Abridged Molodensky dönüşümü
- Çoklu regresyon dönüşümü

Datum A



Datum B



## Elipsoit Yüzeyinde Hesaplamalar

- Hesaplamalara İlişkin Temel Eşitlikler
- Elipsoit Yüzeyinde Dik Koordinatlarla I. Temel Ödev Çözümü
- Elipsoit Yüzeyinde Dik Koordinatlarla I. Temel Ödev Çözümü
- Coğrafi Koordinatlarla Gauss Ortalama Enlem Formülleri Yardımıyla I. Temel Ödev Çözümü
- Coğrafi Koordinatlarla Gauss Ortalama Enlem Formülleri Yardımıyla II. Temel Ödev Çözümü
- Elipsoit Yüzeyinde Coğrafi Koordinatlarla Schreiber Yöntemiyle 1.Temel Ödev Çözümü
- Elipsoit Yüzeyinde Coğrafi Koordinatlarla Eggert Yöntemiyle 1.Temel Ödev Çözümü
- Elipsoit Yüzeyinde Coğrafi Koordinatlarla Eggert Yöntemiyle 2.Temel Ödev Çözümü



## Jeodezik eğrilik

$K_j = k \sin \delta$  ile ifade edilmektedir.

$\delta$ :  $h$  ile  $n$  arasındaki açıdır

$K$ : yüzey eğriliği

### Jeodezik eğri

- Jeodezik eğriliği  $K_j$  her noktasında sıfır olan eğriye “Jeodezik eğri” denir.
- Jeodezik eğri, iki yüzey noktası arasındaki en kısa bağlantı eğrisidir. Düzlemdeki doğrunun ve küre üzerindeki büyük daire yayının yerini tutar.
- $k \neq 0$  ve  $\sin \delta = 0$  : Bunun için  $\delta = 0$  veya  $\delta = 200^\circ$  olmalıdır. Bu ise yüzey normali ve asal normali çakışık demektir ( $\delta = 0$ ).
- $\sin \delta \neq 0$  e  $k = 0$  : Eğriliği 0 olan eğrinin bir doğru olması gerekir. Yüzey üzerinde doğru çizilemeyeceğinden  $k$  sıfıra eşit olamaz.
- Yüzey üzerinde verilen iki noktadan sonsuz sayıda jeodezik eğri geçirilebilir. Her eğri en kısa yolu vermez

