ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

Mehmet Fatih ŞAHAN

VİSKOELASTİK KOMPOZİT PLAKLARIN LAPLACE UZAYINDA DİNAMİK ANALİZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ADANA, 2012

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VİSKOELASTİK KOMPOZİT PLAKLARIN LAPLACE UZAYINDA DİNAMİK ANALİZİ

Mehmet Fatih ŞAHAN

DOKTORA TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez / /2012 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

……………….............	…………………………	…….......................................
Doç. Dr. Beytullah TEMEL	Prof. Dr. Hüseyin R. YERLİ	Doç. Dr. Ali Hamza TANRIKULU
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

………………..............	…………………………..
Doç. Dr. H.Murat ARSLAN	Doç. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. M. Rifat ULUSOY
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: MMF-2009-D8

ÖZ

DOKTORA TEZİ

VİSKOELASTİK KOMPOZİT PLAKLARIN LAPLACE UZAYINDA DİNAMİK ANALİZİ

Mehmet Fatih ŞAHAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Danışman :Doç. Dr. Beytullah TEMEL
Yıl: 2012, Sayfa:121
Jüri :Doç. Dr. Beytullah TEMEL
:Prof. Dr. Hüseyin R. YERLİ
:Doç. Dr. Ali Hamza TANRIKULU
:Doç. Dr. H. Murat ARSLAN
:Doç. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

Bu çalışmada viskoelastik malzemeye sahip ortotropik ve tabakalı kalın plakların dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu (SEM) yardımıyla Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Antisimetrik olarak dik veya eğik açılı şekilde tabakalanmış kalın plakların sönümlü davranışları, birinci mertebe kayma deformasyon teorisi (BKDT) yardımıyla SEM ve Laplace dönüşüm metodunun birlikte kullanılması ile elde edilmiştir. Sistemi idare eden hareket denklemi öncelikle zaman uzayında elde edilmiştir. Ardından, sistem hareket denklemine Laplace dönüşümü uygulanarak elde edilen lineer cebrik denklem takımı sayısal olarak çözülmüştür. Plak malzemesinin lineer elastik veya viskoelastik olduğu kabul edilmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda Kelvin modeli kullanılmıştır. Kelvin modelinde elastik sabitler elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla Laplace uzayında kompleks karşıtları ile yer değiştirmektedir. Böylece, Laplace dönüşüm ile dinamik problem statik forma dönüşmektedir. Dönüşmüş uzayda elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu kullanılmıştır. Önerilen metod için SEM'na dayalı genel amaçlı bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan programın doğruluğu, literatürde analitik ve yarı-analitik çözümleri verilen problemlerin sonuçları ile karşılaştırılarak gösterilmiştir. Sistemi idare eden hareket denklemi zaman uzayında SEM ile elde edilip, ardından Laplace dönüşüm uygulanarak, oldukça etkin ve doğru çözümler elde edilebilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Tabakalı Kalın Plaklar, Viskoelastik Malzeme, Kelvin Sönüm Modeli, Sonlu Elemanlar Metodu, Ters Laplace Dönüşümü.

ABSTRACT

PhD THESIS

DYNAMIC ANALYSIS OF VISCOELASTIC COMPOSITE PLATES IN THE LAPLACE DOMAIN

Mehmet Fatih ŞAHAN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING

Supervisor :Assoc. Prof. Dr. Beytullah TEMEL
Year: 2012, Pages:121
Jury :Assoc. Prof. Dr. Beytullah TEMEL
:Prof. Dr. Hüseyin R. YERLİ
:Assoc. Prof. Dr. A.Hamza TANRIKULU
:Assoc. Prof. Dr. H.Murat ARSLAN
:Assoc. Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

The present study aims to investigate the damped response of laminated Mindlin plates subjected to dynamic loads. The solutions of damped response of anti-symmetric, cross-ply and angle-ply laminates have been obtained by Finite Element Method (FEM) in conjunction with the Laplace transform method using the first order shear deformation theory. The governing equations of motion of the problem are first obtained in the time domain. Subsequently, Laplace transform is applied and the linear algebraic equations are solved numerically. Materials of the laminates are assumed linear elastic or viscoelastic. In the viscoelastic material case, the Kelvin model is employed. According to the correspondence principle the material constants are replaced with their complex counterparts in the Laplace domain. Therefore, the presented model incorporates damping very easily in the transformed domain. The solutions obtained are transformed to the time domain using the modified Durbin's numerical inverse Laplace transform method. For the suggested model, a general-purpose finite element analysis computer program is coded in Fortran. Verification of the numerical procedure is performed by comparing the results of present method with semi-analytical results available in the literature. Obtaining the equation first discretely in the time domain using FEM and then applying the Laplace transform has proved to be a procedure highly accurate and efficient compared to other numerical methods available in the literature.

Key Words: Laminated Thick Plates, Viscoelastic Material, Kelvin model, Finite element method, Inverse Laplace Transform.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında zaman ve mekân seçmeden değerli yardımlarını benden esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren danışmanım, Sayın Hocam, Doç. Dr. Beytullah TEMEL'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalıştığım kurumda, bilimsel faaliyetleri teşvik edici yönetim anlayışı ile çalışmalarıma olanak tanıyarak destek olan Ç.Ü. Ceyhan Meslek Yüksekokulu Müdürü Sayın Prof. Dr. E. Alper GÜVEL'e teşekkür ederim.

Doktora çalışmam süresince gösterdikleri anlayış ve manevi destek nedeniyle eşim Zeynep, kızım Melike Berra ve aileme şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

ÇİZELGELER DİZİNİ **SAYFA**

ŞEKİLLER DİZİNİ **SAYFA**

SİMGELER VE KISALTMALAR

SEM	:	Sonlu elemanlar metodu
KPT		Klasik plak teorisi
BKDT	:	Birinci mertebe kayma deformasyon teorisi
YKDT	:	Yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi
dak.	:	Dakika
s.	:	Saniye
ε_x , ε_y , ε_z	:	x, y ve z doğrultularındaki birim uzamalar
γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}	:	xy, yz ve xz yüzeylerinde oluşan kayma şekil değiştirmeleri
k_x, k_y, k_{xy}	:	Plak orta düzlemindeki eğrilikler
σ_x , σ_y , σ_z	:	x, y ve z doğrultularındaki normal gerilmeler
τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}	:	xy, yz ve xz yüzeylerinde oluşan kayma gerilmeleri
E_x , E_y , E_z	:	x, y ve z doğrultularındaki Elastisite modülleri
G_{12}, G_{23}, G_{31}	:	1-2, 2-3 ve 3-1 yüzeylerindeki kayma modülleri
N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}	:	Plağın birim uzunluğuna etkiyen normal kuvvetler
M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}	:	Plağın birim uzunluğuna etkiyen momentler
Q_{xz}, Q_{yz}	:	Plağın birim uzunluğuna etkiyen kesme kuvvetleri
ρ	:	Kütlesel yoğunluk
$Ø_x$, $Ø_y$	:	y ve x eksenleri etrafındaki dönmeler
ν_{12}, ν_{23}, ν_{13}	:	Poisson oranları
a, b	:	Plağın x ve y doğrultularındaki boyları
h	:	Plak kalınlığı
u, v, w	:	x, y ve z doğrultularındaki deplasmanlar
u_0, v_0, w_0	:	Orta düzlemin x, y ve z doğrultularında yaptığı deplasmanlar
I_0, I_1, I_2	:	Kütlesel atalet momentleri

1. GİRİŞ

Plaklar, yapı mühendisliğinde çok geniş bir kullanım alanına sahip olup, aynı zamanda uçak, gemi mühendisliği gibi pek çok mühendislik alanında da taşıyıcı sistemlerin oluşturulmasında yaygın olarak kullanılmaktadır.

İnşaat mühendisliğinde kullanılan plaklar, kalınlığı diğer iki boyutuna göre çok küçük olan yüzeysel taşıyıcı elemanlardır. Plakların analizlerini kolaylaştırmak amacıyla üç boyutlu elastisite teorisini iki boyuta indirgeyen değişik plak teorileri geliştirilmiştir. Bu teoriler ince ve kalın plak teorileri olmak üzere iki grupta toplanmaktadır. İnce plak teorisi olarak da bilinen klasik plak teorisi (KPT), Kirchhoff'un kabullerinden yararlanılarak üç boyutlu teorilerin iki boyutlu hale indirgendiği teoridir. Plak kalınlığının artmasıyla birlikte, Kirchhoff' plak teorisinde ihmal edilen, kayma deformasyonu etkilerinin belirginleşerek hesaplarda dikkate alınması zorunluluğu doğmaktadır. Bu nedenle kayma deformasyonu etkilerinin de hesaba katıldığı iki boyutlu plak teorileri geliştirilmiştir. Bu teorilerden en çok kullanılanı, Mindlin plak teorisi olarak da bilinen, birinci mertebe kayma deformasyon teorisidir (BKDT). Ayrıca yüksek mertebe kayma deformasyon teorileri (YKDT) de geliştirilmiştir.

Modern teknolojinin her alanda kullanılması, her türlü ihtiyaca cevap verebilecek özellikteki malzemelerin tasarlanması gerekliliği ortaya çıkmıştır. Bu ihtiyacı gidermek amacıyla yapılan çalışmalar, kimyasal bileşenleri farklı iki yada daha fazla malzemenin makro seviyede birleştirilmesi sonucunda kendisini oluşturan malzemelerin üstün özelliklerine sahip karma yapılar geliştirilmiştir. Kompozit olarak adlandırılan bu malzemenin çeşitleri ve kullanım alanları hızla artmaktadır. Kompozit malzemeler otomotiv ve gemi sektöründe, hava, uzay, nükleer, petrol endüstrilerinde, elektronik ve mekatronik sistemlerde, çeşitli spor malzemelerinin ve tıbbi gereçlerin ayrıca müzik aletlerinin yapımında çok yaygın olarak kullanılmaktadır.

Kompozit malzemeler, matris adı verilen bir ana bileşenle, yüksek mukavemete ve yüksek elastisite modülüne sahip fiber (takviye edici) olarak adlandırılan yapısal bileşenden oluşmaktadır. Bir kompozit yapıda matrisin görevi, yapıştırıcı ve tutucu özelliği sayesinde fiberleri bir arada tutmak, yükü fiberlere aktarmak, dağıtmak ve kompozit yapıyı dış etkenlerden korumaktır.

Kompozit plaklar katman ya da tabaka denen elemanların bir araya getirilmesi ile oluşturulurlar. Tabakalara ait asal malzeme eksenlerinin değişik yönlerde üst üste yerleştirilerek çeşitli tabaka dizilimlerine sahip olacak şekilde üretilmesi ile elde edilen tabakalı kompozit plaklar, yüksek mukavemet, hafiflik, yüksek performans gibi pek çok avantaja sahiptir. Tabakalı kompozit plaklar sahip oldukları avantajlarından dolayı modern teknolojinin tüm alanlarında her geçen gün artan şekilde kullanılmaktadır.

Tabakalı kompozit plakların maruz kaldığı etkilerin büyük çoğunluğunun dinamik etkiler olduğu dikkate alındığında, bu malzemelerin statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesinin hayati önem taşıdığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle araştırmacılar değişik sınır şartları ve çeşitli dinamik yükler etkisi altında oluşacak deplasman ve gerilmelerin zamana bağlı değişimlerini doğru tahmin etmeye çalışmış ve bu alanda pek çok araştırma yapmışlardır.

Bu tezde, viskoelastik malzemeye sahip ortotropik kalın plakların ve tabakalı kalın plakların dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu yardımıyla Laplace Dönüşüm uzayında araştırılmıştır. Tabakalı kompozit plakların dinamik analizleri, BKDT'ye göre sonlu elemanlar metodu (SEM) ve Laplace dönüşüm birlikte kullanılarak yapılmıştır. Sistemi idare eden hareket denklemi her düğümde 5 serbestlik derecesine sahip, 8 düğümlü sonlu elemanlar kullanılarak, SEM yardımıyla zaman uzayında elde edilmiştir. Sonlu elemanlara ait rijitlik ve kütle matrisleri ile yük vektörleri Gauss sayısal integrasyon metodu yardımıyla hesaplanmıştır. Rijitlik matrislerinin oluşturulmasında kayma kilitlenmesinin önlenmesi amacıyla, eğilme terimleri için (3x3) Gauss noktası, kayma terimleri için (2x2) Gauss noktası kullanılmıştır. Elde edilen sistem hareket denklemi Laplace dönüşümü yardımıyla lineer cebrik takımına dönüştürülmüştür. Bu denklem takımı Gauss eliminasyon metodu ile Laplace uzayında çözülmüştür. Laplace dönüşümleri sayesinde dinamik problem statik forma dönüşmekte, ayrıca sönümün etkisi dönüşmüş uzayda kolayca ele alınabilmektedir. Plak malzemesinin lineer elastik veya viskoelastik olduğu kabul edilmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda Kelvin sönüm modeli kullanılmaktadır.

Kelvin sönüm modelinde elastik sabitler, elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla, Laplace dönüşüm uzayında kompleks karşıtları ile yer değiştirmektedir. Elde edilen çözümlerin Laplace uzayından zaman uzayına dönüşümü için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace metodu kullanılmaktadır. Bu çalışmada bulunan sonuçlar, hem analitik, hem de SEM ve direkt integrasyon metodu birlikte kullanılarak elde edilen çözümler ile karşılaştırılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Karmaşık geometriye veya değişik yüklemelere sahip ortotropik kalın plakların veya tabakalı kalın plakların dinamik analizine yönelik kapalı çözümler elde etmek çoğu zaman imkânsızdır. Çoğu durumda plak sistemlerinin hareketini idare eden denklemler sonlu farklar, sınır elemanlar ve sonlu elemanlar gibi sayısal metodlar yardımı ile oluşturulurlar. Geometri veya yükleme bakımından karmaşık olsa bile, bilgisayar ile programlamaya olanak vermesi bakımından diğer metodların önüne geçen sonlu elemanlar metodu (SEM) yıllar içerisinde popülerliğini arttırmıştır. Genel olarak plak sistemlerini idare eden hareket denklemleri, mod birleştirme metodu, direk integrasyon metodları veya sayısal operasyonel metodları ile çözülmektedir. Wilson θ metodu, Houlbout metodu, merkezi sonlu farklar metodu, Newmark metodu doğrudan integrasyona dayanan metodlardan birkaç tanesidir. Bathe ve Wilson (1976), doğrudan integrasyon metodlarını test etmiş ve bunlar arasında Newmark metodunun en iyi kararlılık karakterine sahip olduğunu göstermiştir.

Bhimaraddi (1987), geliştirdiği kayma deformasyon teorisini kullanarak statik ve zorlanmış titreşim analizleri Newmark metodu yardımıyla yapmış ve analiz sonuçlarını KPT ve BKDT ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak göstermiştir. Xia ve ark. (2009), kalın plakların elastik dinamik analizlerini ağsız radyal bazlı interpolasyon metodu yardımıyla göstermişlerdir. Ele aldıkları dinamik problemlerin çözümü için Newmark metodunu kullanmışlardır.

Wen (2008), statik ve dinamik yükler etkisindeki Pasternak tipi elastik zeminler üzerindeki Mindlin plakların temel çözümlerine yönelik bir çalışma yapmıştır. Kalın plaklara yönelik temel çözüm, sınır eleman metodu kullanılarak Laplace dönüşüm uzayında elde edilmiştir. Benzer çalışmayı Wen ve Aliabadi (2009), Winkler ve Pasternak tipi elastik zemin üzerindeki Mindlin plakların temel çözümleri için yapmışlardır. Temel ve Şahan (2011), ortotropik malzemeye sahip lineer elastik kalın plakların dinamik davranışını Laplace uzayında teorik olarak incelemişlerdir. Çalışmalarında önerdikleri metodun adım adım integrasyon metodlarına göre çok daha etkin olduğunu göstermişlerdir.

Wen ve ark. (2008), dinamik yükler etkisindeki Mindlin plakların dinamik analizlerini sönüm etkisini dikkate alarak Laplace dönüşüm uzayında yapmışlardır. Wang ve Tsai (1988), viskoelastik Mindlin plakların hareket denklemlerini SEM ile elde ederek quasi-statik ve dinamik analizlerini Newmark metodu ile yapmışlardır. Beskos ve Leung (1984), ince plakların dinamik analizlerini sonlu farklar ve sonlu elemanlar metodu kullanarak Laplace uzayında yapmışlardır. Viskoelastik etkilerin dikkate alınması amacıyla, çalışmalarında Kelvin tipi sönüm modelini kullanmışlardır. Temel ve Şahan (2013), ortotropik malzemeye sahip lineer elastik ve viskoelastik malzemeye sahip kalın plakların dinamik davranışları Laplace uzayında teorik olarak incelemişlerdir. Çalışmalarında önerdikleri metodun adım adım integrasyon metodlarına göre çok daha etkin olduğunu göstermişlerdir.

Pek çok araştırmacı tarafından plakların dinamik yükler etkisi altındaki analizlerine yönelik olarak geliştirilen analitik çözümler bulunmaktadır (Reddy, 1982; Khdeir ve Reddy, 1989; Barrett, 1992; Khdeir, 1995; Khalili ve ark, 2005).

Literatürde tabakalı plakların dinamik analizlerini direk integrasyon metodu ile yapan pek çok çalışma bulunmaktadır. Burada bunlardan birkaçı verilecektir. Reddy (1983), izotropik, ortotropik ve tabakalı anizotropik plakların hareket denklemlerini SEM ile oluşturarak dinamik analizini Newmark metodu yardımı ile elde etmiştir. Mohebpour ve ark. (2011), tabakalı plakların hareket denklemlerini SEM kullanarak BKDT'ne göre elde ederek dinamik analizlerini Newmark metodu yardımıyla yapmışlardır. Makhecha ve ark. (2001), tabakalı kalın plakların analizlerini 8 düğümlü sonlu elemanlar kullanılmak suretiyle SEM ile yapmışlardır. Termal ve mekanik yüklemeler etkisindeki dinamik davranışları araştırmak için Newmark direk integrasyon metodunu kullanmışlardır. Ghafoori ve Asghari (2010), açılı tabakalı plakların dinamik davranışını araştırmışlardır. Nayak ve ark. (2004), ortotropik sandviç plakların yüksek mertebe kayma deformasyon teorisine göre zorlanmış titreşimlerini SEM yardımı ile araştırmışlardır. Çalışmada sistemi idare eden denklem takımı Newmark direk integrasyon metodu ile çözülmüştür. Moita ve ark. (2011), viskoelastik çekirdek tabakaya sahip sandviç plakların zorlanmış titreşimi için sönüm etkisini de dikkate alan sonlu elemanlar modeli geliştirmişlerdir. Lee ve Han (2006), keyfi yükleme etkisindeki tabakalı kompozit plak ve kabukların zorlanmış titreşim analizini araştırmışlardır. Çalışmalarında sistemi idare eden hareket denklemleri SEM yardımıyla elde edilmiş, çözüm için ise Newmark-β metodu kullanılmıştır. Mallikarjuna ve Kant (1988), çok tabakalı simetrik kompozit plaklara yönelik olarak yüksek mertebe kayma deformasyon teorisine göre basit izoparametrik sonlu elemanlar metodunu göstermişlerdir. Wu ve Chang (1989), yabancı cisimlerin darbe etkisindeki tabakalı kompozit plakların dinamik analizini sonlu elemanlar yardımı ile yapmışlardır. Meimaris ve Day (1995), 3 boyutlu 20 düğümlü solid eleman kullanarak 3 boyutlu sonlu eleman modelini geliştirerek tabakalı anizotropik plaklarda kullanmışlardır. Owen ve Li (1988), tabakalı anizotropik plakların elastik ve elasto-plastik dinamik analizlerine yönelik olarak rafine edilmiş sonlu elemanlar metodunun uygulamasını göstermişlerdir. Yukarıda verilen çalışmalarda dinamik problemin çözümü için Newmark direk integrasyon metodu kullanılmıştır. Kant ve ark. (1990), tabakalı simetrik olmayan kompozit plakların yüksek mertebe deplasman modeline göre izoparametrik sonlu elemanlar formülasyonunu göstermişlerdir. Çalışmalarında sistemi idare eden hareket denkleminin çözümü için Newmark ve Wilson-θ metodları kullanmışlardır. Pervez ve Zabaras (1992), tabakalı anizotropik plakların lineer zorlanmış titreşim analizine yönelik olarak rafine edilen sonlu eleman modeli üzerine bir çalışma yapmışlardır. Rafine edilen modelde sönüm etkisi de dikkate alınmış ve hareket denkleminin analizi için Newmark metodu kullanılmıştır. Zabaras ve Pervez (1990), tabakalı kompozit plakların viskoz sönümünü SEM kullanılarak elde etmişlerdir. Çalışmalarında fiber doğrultularının, kalınlık/boy oranının, tabakalanmanın sönüm üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

Kant ve ark. (1992), sandviç plakların zorlanmış titreşimine ait hareket denkelemlerini kayma deformasyon etkisini dikkate alarak sonlu elmanlar metodu kullanarak elde etmiş ve elde edilen hareket denklemlerini mod süperpozisyon metodu ile çözmüşlerdir. Elde edilen sonuçlar direk integrasyon metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Malekzadeh ve ark. (2009), tabakalı plakların dinamik analizi için diferansiyel quadrature ve Modal analiz metodlarını kullanmışlardır.

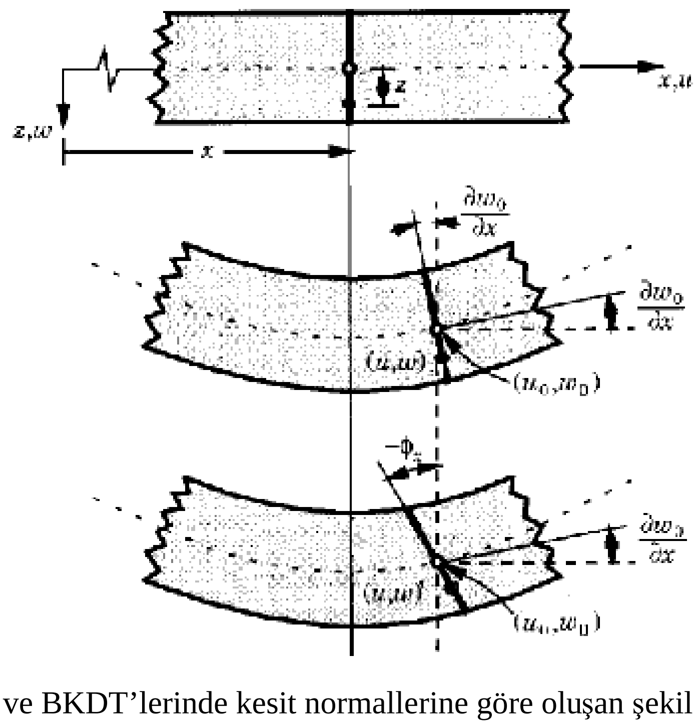
Wang ve ark. (2001), simetrik tabakalı plakların zorlanmış titreşim analizine yönelik araştırmalarını şerit eleman metodu kullanarak yapmışlardır. Çalışmalarında elde ettikleri adi diferansiyel denklem takımını frekans uzayında analitik olarak çözmüşlerdir. Wang ve ark. (2000), tabakalı plakların zorlanmış titreşim analizini dönme ataletleri etkilerini de dikkate alarak şerit eleman metodu kullanarak yapmışlardır. Çalışmada dinamik analiz frekans uzayında elde edilmiş ve zaman uzayındaki çözümler için Fourier dönüşüm tekniği kullanılmıştır. Liew ve ark. (2004), tabakalı plaklardaki piezoelektrik etkileri ağsız metodlar kullanarak araştırmışlardır. Cederbaum ve Aboudi (1989), darbe etkisi altındaki tabakalı viskoelastik plakların dinamik analizini Fourier dönüşüm metodu kullanmak suretiyle frekans uzayında yapmışlardır.

Yukarıda bahsedildiği gibi, kalın plakların veya tabakalı kalın plakların dinamik analizleri genellikle Newmark metodu, mod süperpozisyon metodu veya sayısal operasyonel metodlar kullanılarak yapılmıştır. Literatür araştırmaları neticesinde tabakalı kalın plakların Fourier uzayındaki analizlerine yönelik çalışmalar çok kısıtlı olduğu görülmüştür. Ancak yazarın bilgisine göre, tabakalı kalın plakların sonlu elemanlar metodu kullanılarak Laplace uzayında viskoelastik analizine yönelik herhangi bir çalışmaya rastlanamamıştır.

Bu tezde ortotropik kalın plakların ve tabakalı kalın plakların viskoelastik analizlerine yönelik olarak, çok etkin ve aynı zamanda çok basit bir çözüm metodu önerilecektir.

3. MATERYAL VE METOD

İki paralel yüzey ve bu yüzeylere göre daha küçük olan dik bir yan yüzeyin birleşmesinden meydana gelen cisimlere plak denir. Diğer bir deyişle bir boyutu (kalınlık) diğer iki boyutuna (plak eni ve boyu) göre küçük olan ve her mühendislik alanında kullanılan taşıyıcı elemanlardır. Plakların analizini kolaylaştırmak amacıyla, üç boyutlu elastisite teorisini iki boyuta indirgeyen değişik plak teorileri geliştirilmiştir. Bu teoriler ince ve kalın plak teorileri olmak üzere iki grupta toplanabilir. Plak kalınlığının açıklığına oranı, 1/20'den küçük olan plaklara ince plak denilmektedir. Kirchhoff kabulleri olarak bilinen klasik plak teorisine (KPT) göre, yüklemeden önce başlangıçta orta düzleme dik olan kesitler, eğilmeden sonra da orta düzleme dik kalmaktadır (Şekil 3.1). Bu teoride kalınlık boyunca kayma deformasyonları ihmal edilir. Kalın plaklarda ise, kayma deformasyonları dikkate alınarak çözümler yapılmaktadır. Kalın plak teorisi, şekil değiştirmeden önce orta düzleme dik olan kesitlerin şekil değiştirmeden sonra orta düzleme dik kalmadığı kabulüne dayanmaktadır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. KPT ve BKDT'lerinde kesit normallerine göre oluşan şekil değiştirmeler

Mindlin (1951), tarafından eğilme ve enine ataletlere ek olarak kayma şekil değiştirmeleri ve dönme atalet etkilerini içeren bir kalın plak teorisi elde edilmiştir. Bu teori birinci mertebe kayma deformasyon teorisi (BKDT) olarak da bilinir. BKDT hesaplamalar için KPT'sine göre daha gerçekçi bir matematiksel model oluşturur. Bunun dışında kayma deformasyonlarını dikkate alan çok sayıda yüksek mertebe kayma deformasyon teorileri (YKDT) bulunmaktadır.

Kompozitler yapay ve çok fazlı malzemelerdir. Yapıyı oluşturan bileşenler, kimyasal olarak farklıdırlar ve fazları birbirinden ayıran belirgin bir ara yüzey bulunmaktadır. Bu bileşenler makroskobik seviyede bir araya getirilirler ve birbirleri içinde çözünmezler. Takviye elemanı olarak adlandırılan bileşen; fiber, partikül veya ince levha şeklinde olabilir. Diğer bileşen ise matris fazıdır. Bu malzemelerin makro düzeyde bir araya getirilmesi ile bazı karakteristiklerinin bu bileşenler tek olarak değerlendirildiği durumdakinden daha iyi olmasına müsaade eder. Kompozit malzemelerin geleneksel malzemelere göre avantajı; bileşenlerinin iyi özelliklerinin ön plana çıkarılarak bir araya getirilmesidir.

Tabakalı kompozit plaklar, tabakalara ait asal malzeme eksenlerinin değişik doğrultularda üst üste yerleştirilerek çeşitli tabaka dizilimlerine sahip olacak şekilde üretilmesi ile elde edilirler. Bu tabakaları oluşturan malzemeler farklı olarak seçilebileceği gibi, aynı tür malzemeler de kullanılabilmektedir. Tabakalı kompozit plaklar yüksek mukavemet, hafiflik, yüksek performans gibi pek çok avantaja sahiptir. Tabakalı kompozit plaklar avantajlarından dolayı modern teknolojinin tüm alanlarında her geçen gün artan şekilde kullanılmaktadır. Tabakalı kompozit plakların analizinde kullanılan teoriler aşağıdaki şekilde gruplandırılabilir (Reddy, 2003):

1) Eşdeğer tekil tabaka teorileri (iki boyutlu)
   a) Klasik tabaka teorisi
   b) Kayma deformasyon tabaka teorileri
2) Üç boyutlu elastisite teorisi
   a) Üç boyutlu elastisite formülasyonları
   b) Parçalı tabaka teorileri
3) Çoklu model yöntemleri (iki ve üç boyutlu)

İki ya da daha fazla tabakadan oluşan plaklar, çok sayıda ince tabakanın değişik doğrultularda istiflenmesiyle üretilirler. Bu tip kompozit tabakalı plakların rijitlik matrisleri tabakalanma teorileri yardımıyla hesaplanabilir. Tabakalanma teorileri tabakaları ayrı ayrı dikkate alarak her bir tabaka için kendi yerel koordinat sisteminde yazılan bünye denklemlerinin, malzemenin tümü için seçilen sistem koordinat takımına dönüşümü ile tabakalı plaklarda bünye denklemlerinin elde edilmesine olanak verir. Bu çalışmada kayma deformasyon tabaka teorilerinden BKDT kullanılacaktır.

Tabakalı kompozit plak problemlerde sistemi idare eden hareket denklemleri, yapılan kabuller ışığında elde edilen teoriler yardımıyla, ya analitik olarak ya da sayısal metodlar kullanılarak, yaklaşık olarak elde edilir. Değişik geometri ve yüklemelere sahip problemlerde çözümün kapalı olarak elde edilmesi oldukça zor hatta imkânsız olabilir. Çoğu durumda sistemi idare eden hareket denklemleri ayrık olarak sayısal metodlar yardımıyla elde edilir. Bu çalışmada yapısal analizler için programlamaya elverişli olması nedeniyle sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır.

4. ORTOTROPİK KALIN PLAKLAR

4.1. Malzemelerde Gerilme Birim Deformasyon İlişkisi

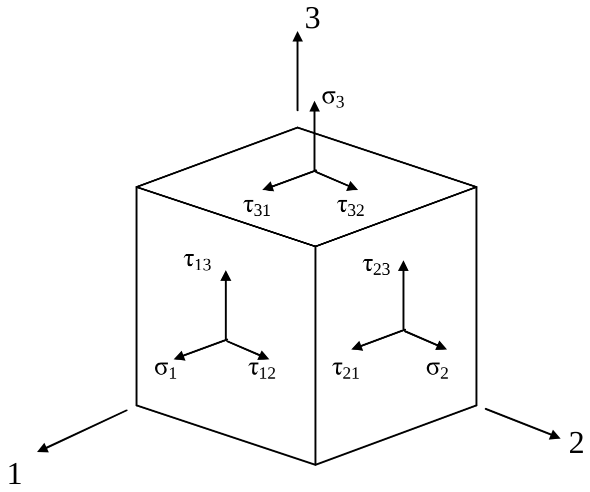
3 boyutlu kartezyen koordinat sisteminde gerilme-deformasyon ilişkisi, 6 adet gerilme ve 6 adet birim deformasyon bileşeni ile tanımlanır. Bu bileşenlerin üçü normal, üçü ise kayma bileşenleridir. Bu gerilme ve birim deformasyon bileşenleri arasındaki lineer ilişki, Hooke kanunu olarak bilinir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir (Ochoa ve Reddy, 1992).

$$\sigma_k = C_{kj}\,\varepsilon_j \qquad (k = 1,2,\ldots,6) \tag{4.1}$$

Burada C_{kj} elastik malzeme sabitleri olarak tanımlanır. C_{kj}, 6x6 boyutunda kare matris içerisinde k-nıncı satır ve j-ninci sütundaki elemanı gösterir. (4.1) denkleminde indisli gösterim için aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \sigma_{11} && \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}\\
&\sigma_2 = \sigma_{22} && \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}\\
&\sigma_3 = \sigma_{33} && \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}\\
&\sigma_4 = \tau_4 = \sigma_{23} = \tau_{23} && \varepsilon_4 = \gamma_4 = 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23}\\
&\sigma_5 = \tau_5 = \sigma_{13} = \tau_{13} && \varepsilon_5 = \gamma_5 = 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13}\\
&\sigma_6 = \tau_6 = \sigma_{12} = \tau_{12} && \varepsilon_6 = \gamma_6 = 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12}
\end{aligned} \tag{4.1.a}$$

Burada σ_1, σ_2, σ_3 normal gerilmeler, τ_{23}, τ_{13}, τ_{12} ise kayma gerilmeleri olup Şekil 4.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Sonsuz küçük kübik elemandaki gerilmeler

(4.1) denklemi ile verilen Hooke kanunu matris formunda ifade edilmek istenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

Burada, elastik sabitleri içeren matrise elastiklik matrisi denir. (4.2) denklemindeki elastiklik matrisi simetrik olup, anizotropik malzeme için geçerlidir. Simetri nedeniyle 36 adet olan bağımsız terim sayısı 21'e iner. Bu durumda gerilme birim deformasyon ilişkisi aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

Malzeme özelliklerine ait bir simetri düzlemi varsa bu tip malzemeler monoklinik malzeme adını alır. Monoklinik malzemelerin elastiklik matrisinde 16 adet elastik sabit mevcut olup, bunlardan 13 tanesi bağımsızdır. Monoklinik malzemeler için gerilme birim deformasyon ilişkisi aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

Malzeme sisteminde birbirine dik üç düzlemde de simetri mevcutsa, bu tip malzemelere ortotropik malzeme denir. Bu tip malzemeler 12 adet elastiklik sabitine sahip olup, simetriklik nedeniyle bunlardan 9'u bağımsızdır. Ortotropik malzemeler için gerilme birim deformasyon ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

Ortotropik malzemeye ait C_{kj} elastik sabitleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
&C_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, \qquad C_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}, \qquad C_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} \\
&C_{12} = \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta} = \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{E_1E_3\Delta} \\
&C_{23} = \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} = \frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta} \\
&C_{13} = \frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_3\Delta} = \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} \\
&C_{44} = G_{23} \qquad C_{55} = G_{13} \qquad C_{66} = G_{12}
\end{aligned} \tag{4.5.a}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \qquad (4.5.b)$$

Burada E_i, i-inci malzeme doğrultusundaki Elastisite modülünü, ν_{ij}, i-inci doğrultudaki gerilme etkisiyle j doğrultusunda oluşan enine birim deformasyon olan Poisson oranını gösterir. G_{23}, G_{13} ve G_{12} ise, sırasıyla, 2-3, 1-3, 1-2 düzlemlerindeki kayma modüllerini verir.

4.2. Ortotropik Kalın Plaklarda Gerilme-Birim Deformasyon İlişkisi

Genellikle plak düzlemine dik birim deformasyon olan ε_3, düzlem içindeki ε_1 ve ε_2 birim deformasyonlar ile karşılaştırıldığında, bunların yanında çok küçüktür ve ihmal edilebilir. Bu kabul ile gerilme-birim deformasyon ilişkisini veren matriste 7 adet elastik sabit mevcut olup, simetri nedeniyle bunlardan 6’sı bağımsızdır. Bu durumda gerilme birim deformasyon ilişkisi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & Q_{55} & 0 \\ & & & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad (4.6)$$

Burada gerilme ile birim deformasyon arasındaki ilişkiyi veren matrise indirgenmiş elastiklik matrisi veya indirgenmiş rijitlik matrisi denir. İndirgenmiş elastiklik matrisinin terimleri açık şekilde aşağıda verilmiştir.

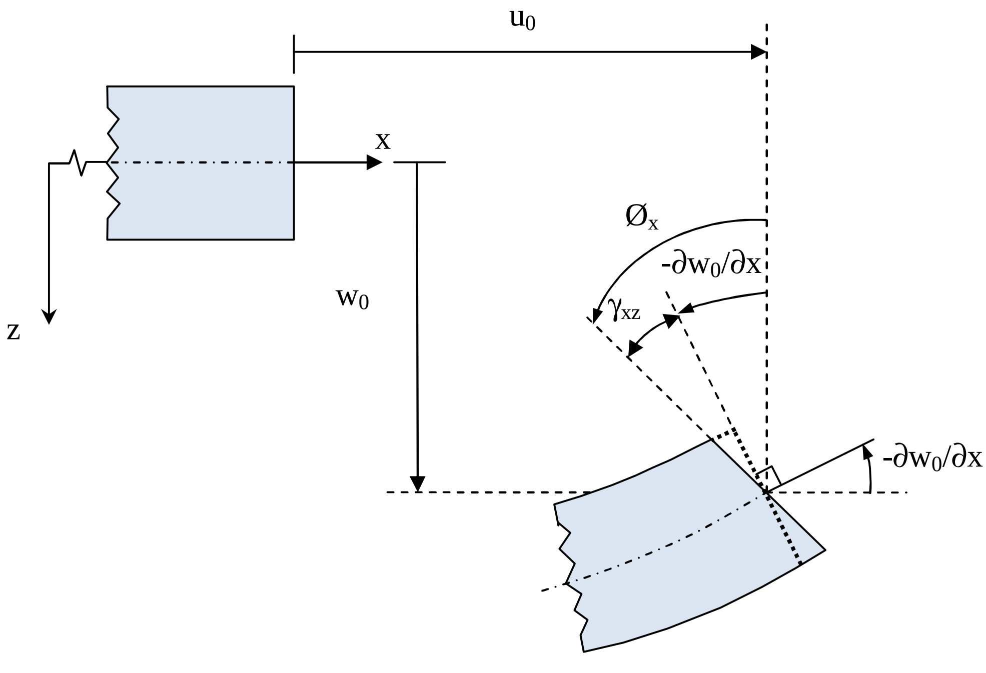
$$Q_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$$
$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12} \qquad (4.7)$$

Ortotropik plaklar için elde edilen bünye denklemi x–y global koordinatlarda sistem doğrultuları dikkate alınarak yeniden yazılabilir. Bu amaçla bünye denklemindeki indisler yeniden düzenlenerek gerilmeler düzlem içi ve düzlem dışı olarak yeniden sıralanırsa, aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{66} & 0 & 0 \\ & sim & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

4.3. Kalın Plakların Kinematiği

Şekil değiştirmeden önce orta düzleme dik olan kesitlerin şekil değiştirmeden sonra orta düzleme dik kalmadığı kabulüne dayanan birinci mertebe kayma deformasyon teorisinde (BKDT), kayma şekil değiştirmeleri ve dönme atalet etkileri de dikkate alınmaktadır (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. BKDT'ne göre Mindlin plak şekil değiştirmesi

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre yer değiştirme bileşenleri aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\,\emptyset_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\,\emptyset_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Burada u, v ve w plağın (x, y, z) noktasındaki yer değiştirmeleri, u_0 ve v_0 orta düzlemin x ve y yönlerindeki yer değiştirmeleri olup, genelleştirilmiş deplasmanlardan $\left(w_0, \emptyset_x, \emptyset_y\right)$ bağımsızdırlar. Burada sadece eğilme durumu inceleneceğinden u_0 ve v_0 deplasmanları dikkate alınmayacaktır. w_0 orta düzlemin plak düzlemine dik olan yer değiştirmesidir. $\emptyset_x$ ve $\emptyset_y$ ise, sırasıyla y ve x eksenleri etrafındaki dönmeler olup, aşağıdaki şekilde ifade edilirler.

$$\emptyset_x = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \emptyset_y = \frac{\partial v}{\partial z} \tag{4.10}$$

Ortotropik bir plak için birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre yapılan kabuller ve her noktada $\left(w_0, \emptyset_x, \emptyset_y\right)$ serbestlikleri dikkate alınarak elde edilen birim deformasyonlar en genel halde aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

(4.9) ve (4.10) denklemleri (4.11) denkleminde yerlerine konursa birim deplasmanlar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\dfrac{\partial \emptyset_x}{\partial x} \\ -z\dfrac{\partial \emptyset_y}{\partial y} \\ -z\left(\dfrac{\partial \emptyset_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \emptyset_y}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y} - \emptyset_y \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x} - \emptyset_x \end{Bmatrix} \tag{4.12}$$

Bu denklemde uzama şekil değiştirmeleri

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial \emptyset_x}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \emptyset_y}{\partial y} \\ -\left(\dfrac{\partial \emptyset_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \emptyset_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

şeklinde gösterilebilir. Uzama şekil değiştirmeleri eğrilikler yardımı ile aşağıdaki şekilde,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.14}$$

veya kapalı formda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\{\varepsilon\} = z\,\{\kappa\} \tag{4.15}$$

Kayma şekil değiştirmeleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{4.16}$$

(4.14) ve (4.16) denklemleri (4.8) denkleminde yerine konursa ortotropik plakta, orta düzlemden z kadar uzaklıktaki bir noktada gerilmeleri veren denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{66} & 0 & 0 \\ & sim. & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z\,\kappa_x \\ z\,\kappa_x \\ z\,\kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{4.17}$$

(4.17) denklemi eğilme ve kayma terimleri ayrı ayrı olacak şekilde düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ sim & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z\,\kappa_x \\ z\,\kappa_y \\ z\,\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

4.3.1. Hareket Denklemleri

Plak hareket denklemleri, dinamik yükleme durumu için virtüel yer değiştirme ilkesi yardımı ile elde edilebilir.

$$\int_0^t \big((\delta U + \delta V) - \delta T\big)dt = 0 \tag{4.20}$$

Burada, δU virtüel şekil değiştirme enerjisi, δV dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi, δT ise sistemin virtüel kinetik enerjisi olup, t dikkate alınan zamandır. Virtüel şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \big(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz}\big) dz dA \qquad (4.21)$$

(4.14) denklemi (4.21) denkleminde yerine konur ve plak kalınlığı (h) boyunca integral alınırsa, şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\delta U = \int_A (M_{xx}\delta\kappa_x + M_{yy}\delta\kappa_y + M_{xy}\delta\kappa_{xy} + Q_{yz}\delta\gamma_{yz} + Q_{xz}\delta\gamma_{xz}) dA \qquad (4.22)$$

Burada M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} ve Q_{xz}, Q_{yz} sırasıyla, plağın birim uzunluğuna etkiyen momentler ve kesme kuvvetleri olup, bunlar gerilmelerin plak kalınlığı boyunca integre edilmesiyle elde edilir.

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, z \, dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, z \, dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, z \, dz \end{Bmatrix} \qquad (4.23)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}\, dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}\, dz \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

Böylece (4.22) ifadesi daha basit olarak

$$\delta U = \int_A (\{\delta\kappa\}^t\{M\} + \{\delta\gamma\}^t\{Q\})dA \tag{4.25}$$

şeklinde gösterilebilir. (4.18) ve (4.19) denklemleri sırasıyla (4.23) ve (4.24) denklemlerinde yerlerine konulursa momentler ve kesme kuvvetleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ & D_{22} & 0 \\ sim. & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.26}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{4.27}$$

(4.26) ve (4.27) denklemlerindeki D_{ij} ve A_{ij} terimleri:

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \qquad D_{12} = \frac{\nu_{12}E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}$$

$$D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \qquad D_{66} = \frac{h^3}{12}G_{12}$$

$$A_{44} = k\, G_{23}h \qquad A_{55} = k\, G_{31}h \tag{4.28}$$

Burada, *k* Mindlin kayma düzeltme katsayısıdır.

(4.26) ve (4.27) denklemleri kapalı olarak

$$\{M\} = [\mathcal{D}]\{\kappa\}, \quad \{Q\} = [\mathcal{A}]\{\gamma\} \tag{4.29}$$

şeklinde gösterilirler. Bunlar (4.25) denkleminde yerine konursa

$$\delta U = \int_A (\{\delta\kappa\}^t[\mathcal{D}]\{\kappa\} + \{\delta\gamma\}^t[\mathcal{A}]\{\gamma\})dA \tag{4.30}$$

elde edilir.

Plak yüzeyine dik olarak etki eden dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş

$$\delta V = -\int_A q\delta w dA \tag{4.31}$$

denklemi ile elde edilir. Burada q plağa etki eden yayılı yükü gösterir.

Sistemin kinetik enerjisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\delta T = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho[(\dot{u})(\delta\dot{u}) + (\dot{v})(\delta\dot{v}) + (\dot{w})(\delta\dot{w})]dzdA \tag{4.32}$$

Burada ρ, malzemenin kütlesel yoğunluğunu gösterir. (4.9) denklemi (4.32) denkleminde yerine konur, kalınlık boyunca integral alınırsa, plağa ait kinetik enerji aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\delta T = \int_A \left[I_0(\ddot{w}\delta w) + I_2\left(\ddot{\emptyset}_x\delta\emptyset_x + \ddot{\emptyset}_y\delta\emptyset_y\right)\right]dA \tag{4.33}$$

Burada I_0 ve I_2 kütlesel atalet momentleri olup, aşağıdaki integrallerden hesaplanır.

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, dz = \rho h, \qquad I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz = \frac{1}{12}\rho h^3 \tag{4.34}$$

(4.33) ifadesi yeniden düzenlenerek

$$\delta T = \int_A \left\{ (I_0 \ddot{w})\delta w + \left(I_2 \ddot{\emptyset}_x\right)\delta\emptyset_x + \left(I_2 \ddot{\emptyset}_y\right)\delta\emptyset_y \right\} dA \tag{4.35}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.22), (4.31) ve (4.35) denklemleri (4.20) denkleminde yerlerine konursa virtüel işi veren ifade

$$\int_0^t \Bigg(\int_A \Big\{ M_{xx}\delta\kappa_x + M_{yy}\delta\kappa_y + M_{xy}\delta\kappa_{xy} + Q_{yz}\delta\gamma_{yz} + Q_{xz}\delta\gamma_{xz} - q\delta w_0$$
$$-I_0(\ddot{w}\delta w) - I_2\left(\ddot{\emptyset}_x\delta\emptyset_x + \ddot{\emptyset}_y\delta\emptyset_y\right) \Big\} dA \Bigg) dt = 0 \tag{4.36}$$

şeklinde veya daha basit olarak

$$\int_0^t \Bigg[\int_A (\{\delta\kappa\}^t[\mathcal{D}]\{\kappa\} + \{\delta\gamma\}^t[\mathcal{A}]\{\gamma\} - q\delta w_0$$
$$-(I_0\ddot{w})\delta w - \left(I_2\ddot{\emptyset}_x\right)\delta\emptyset_x - \left(I_2\ddot{\emptyset}_y\right)\delta\emptyset_y \,)dA \Bigg] dt = 0 \tag{4.37}$$

şeklinde elde edilir.

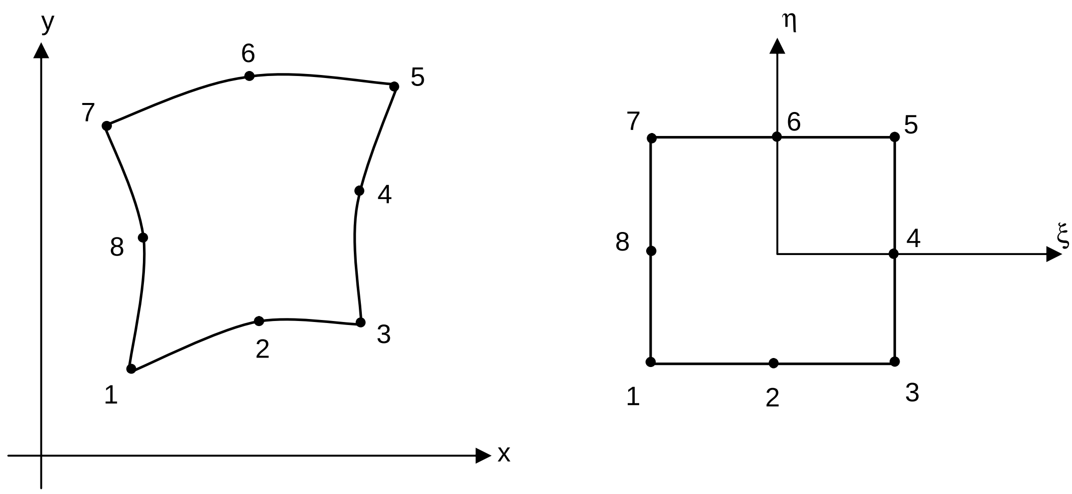
4.3.2. BKDT'ye Göre Plakların Sonlu Eleman Formülasyonu

4.3.2.1. Şekil Değiştirmeler

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre herhangi bir noktadaki çökme veya dönmeler, $\{u\} = \{ w_0, \emptyset_x, \emptyset_y\}^{\mathrm{T}}$, şekil fonksiyonları yardımı ile aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$w_0 = \sum_{i=1}^{n} N_i w_i, \qquad \emptyset_x = \sum_{i=1}^{n} N_i \emptyset_{xi}, \qquad \emptyset_y = \sum_{i=1}^{n} N_i \emptyset_{yi} \qquad (4.38)$$

Burada n, her elemandaki düğüm sayısı, N_i ise düğümlere ait şekil fonksiyonlarıdır. Elemandaki düğüm deplasmanları da, $\{d\}_e = \{ w_{0_i}, \emptyset_{xi}, \emptyset_{yi}\}^{\mathrm{T}}$ şeklindedir. Bu tezde formülasyonlarda, 8 düğümlü sonlu elemanlar kullanılacaktır (Şekil 4.3).



a) Gerçek eleman b) Referans eleman

Şekil 4.3. 8 düğümlü sonlu eleman

8 düğümlü sonlu elemana ait şekil fonksiyonları aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1)\\
N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)\\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)\\
N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)\\
N_5 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2)\\
N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\\
N_7 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2)\\
N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

Plağın herhangi bir noktasındaki deplasmanlar matris formunda

$$
\{u\} = \begin{Bmatrix} w \\ \emptyset_x \\ \emptyset_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \emptyset_{xi} \\ \emptyset_{yi} \end{Bmatrix} \tag{4.40}
$$

veya kapalı olarak

$$
\{u\} = [N]\{d\}_{(e)} \tag{4.41}
$$

şeklinde gösterilir. Herhangi bir noktadaki deplasmanların değişimi ise

$$
\{\delta u\} = [N]\{\delta d\}_{(e)}\,, \quad \{\delta u\}^t = \{\delta d\}_{(e)}^t[N]^t \tag{4.42}
$$

olarak ifade edilir.

Plak orta düzlemindeki şekil değiştirmeler ve eğrilikler, şekil fonksiyonları yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
\kappa_x &= -\frac{\partial \emptyset_x}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{8} N_{i,x}\emptyset_{xi} \\
\kappa_y &= -\frac{\partial \emptyset_y}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{8} N_{i,y}\emptyset_{yi} \\
\kappa_{xy} &= -\left(\frac{\partial \emptyset_x}{\partial y} + \frac{\partial \emptyset_y}{\partial x}\right) = -\sum_{i=1}^{8}\left(N_{i,y}\theta_{xi} + N_{i,x}\theta_{yi}\right) \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \emptyset_y = \sum_{i=1}^{8}\left(N_{i,y}w_i - N_i\emptyset_{yi}\right) \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \emptyset_x = \sum_{i=1}^{8}\left(N_{i,x}w_i - N_i\emptyset_{xi}\right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Eğrilikler şekil fonksiyonları yardımı ile matris formunda

$$\{\kappa\} = \sum_{i=1}^{8}\left(\begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i \\ \emptyset_{xi} \\ \emptyset_{yi} \end{Bmatrix}\right) \tag{4.44}$$

veya kapalı olarak

$$\{\kappa\} = [B_f]\{d\}_{(e)} \tag{4.45}$$

şeklinde yazılabilir. Eğriliklerin değişimi ise

$$\{\delta\kappa\} = [B_f]\{\delta d\}_{(e)}, \qquad \{\delta\kappa\}^t = \{\delta d\}_{(e)}^t [B_f]^t \tag{4.46}$$

şeklinde tanımlanır. Kayma şekil değiştirmeleri de şekil fonksiyonları yardımı ile matris formunda

$$\{\gamma\} = \sum_{i=1}^{8}\left(\begin{bmatrix} N_{i,y} & 0 & -N_i \\ N_{i,x} & -N_i & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i \\ \emptyset_{xi} \\ \emptyset_{yi} \end{Bmatrix}\right) \tag{4.47}$$

şeklinde yazılabilir veya kapalı olarak

$$\{\gamma\} = [B_s]\{d\}_{(e)} \tag{4.48}$$

şeklinde gösterilebilir. Kayma şekil değiştirmelerinin değişimi ise

$$\{\delta\gamma\} = [B_s]\{\delta d\}_{(e)}, \qquad \{\delta\gamma\}^t = \{\delta d\}_{(e)}^t[B_s]^t \tag{4.49}$$

şeklinde ifade edilir. (4.44) ve (4.47) denklemleri birleştirilerek aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{Bmatrix} \{\kappa\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} = [B]\{d\}_{(e)} = \sum_{i=1}^{8}\left(\begin{bmatrix} 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \\ N_{i,y} & 0 & -N_i \\ N_{i,x} & -N_i & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i \\ \emptyset_{xi} \\ \emptyset_{yi} \end{Bmatrix}\right) \tag{4.50}$$

4.3.2.2. Virtüel İş İfadesi

Virtüel şekil değiştirme enerjisinin, dış kuvvetlerin yaptığı işin ve kinetik enerjinin sonlu eleman ağındaki her eleman için ayrı ayrı uygulanması ve uygun biçimde toplanması ile sisteme ait virtüel iş elde edilir.

$$\delta U = \sum_{e=1}^{el}\delta U_e \qquad \delta V = \sum_{e=1}^{el}\delta V_e \qquad \delta T = \sum_{e=1}^{el}\delta T_e \tag{4.51}$$

burada *el* sistemdeki sonlu eleman sayısıdır.

(4.45) ve (4.48) denklemlerinin (4.30) denkleminde yerlerine konması ve böylece elde edilen denklemin bir eleman için yazılması ile sonlu elemana ait virtüel şekil değiştirme enerjisi elde edilir.

$$\delta U_e = \int_{Ae} \left(\{\delta\kappa\}^t [\mathcal{D}][B_f]\{d\}_{(e)} + \{\delta\gamma\}^t [\mathcal{A}][B_s]\{d\}_{(e)} \right) dA \tag{4.52}$$

Benzer şekilde (4.46) ve (4.49) denklemleri (4.52) denkleminde yerlerine konursa sonlu eleman ait virtüel şekil değiştirme enerjisi

$$\delta U_e = \{\delta d\}_{(e)}^t \left[\int_{Ae} \left\{ [B_f]^t [\mathcal{D}][B_f] + [B_s]^t [\mathcal{A}][B_s] \right\} dA \right] \{d\}_{(e)} \tag{4.53}$$

olarak elde edilir. Bu denklem sadece bir sonlu elemana ait virtüel şekil değiştirme enerjisini verir. Bu denklem daha basit olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\delta U_e = \{\delta d\}_{(e)}^t [k]_e \{d\}_{(e)} \tag{4.54}$$

Burada $[k]_e$ eleman rijitlik matrisini temsil eder. (4.54) denkleminin (4.51) denkleminde yerine konulması ile sistemin virtüel şekil değiştirme enerjisini veren denklem elde edilir.

$$\delta U = \sum_{e=1}^{el} \delta U_e = \sum_{e=1}^{el} \{\delta d\}_{(e)}^t [k]_e \{d\}_{(e)} \tag{4.55}$$

Sistemin virtüel şekil değiştirme enerjisini veren denklem sistemin düğüm deplasmanları cinsinden en genel halde:

$$\delta U = \{\delta D\}^t \left[\sum_{e=1}^{el} [k]_e \right] \{D\} = \{\delta D\}^t [K] \{D\} \tag{4.56}$$

olarak gösterilir. Burada $[K]$ sistem rijitlik matrisini, $\{D\}$ ise sistem düğüm deplasmanlarını gösterir.

Dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi gösteren (4.31) denklemi şekil fonksiyonları yardımı ile sonlu eleman için yazılırsa

$$\delta V_e = -\int_{Ae} \{q\}_e [N] \{\delta d\}_{(e)} dA = -\{\delta d\}_{(e)}^t \int_{Ae} [N]^t \{q\}_e dA \qquad (4.57)$$

elde edilir. Burada $\{q\}_e$ sonlu elemana etki eden yayılı yük vektörü aşağıda verilmiştir:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (4.58)$$

(4.57) ifadesi daha basit olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\delta V_e = -\{\delta d\}_{(e)}^t \{f\}_e \qquad (4.59)$$

Burada $\{f\}_e$, sonlu elemana ait düğüm yük vektörüdür. Dış kuvvetlerin sistem üzerinde yaptığı virtüel işi gösteren denklem:

$$\delta V = \sum_{e=1}^{el} \delta V_e = -\sum_{e=1}^{el} \{\delta d\}_{(e)}^t \{f\}_e \qquad (4.60)$$

olarak elde edilir. Bu denklem en genel halde:

$$\delta V = -\{\delta D\}^t \left[\sum_{e=1}^{el} \{f\}_e \right] = -\{\delta D\}^t \{F\} \qquad (4.61)$$

şeklinde gösterilir. Burada $\{F\}$ sisteme ait düğüm yük vektörünü temsil eder.

Herhangi bir noktadaki ivmeler, $\{\ddot{u}\} = \{\ddot{w}, \ddot{\emptyset}_x, \ddot{\emptyset}_y\}^{\mathrm{T}}$, şekil fonksiyonları yardımı ile

$$\{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\emptyset}_x \\ \ddot{\emptyset}_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \left(\begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_i \\ \ddot{\emptyset}_{xi} \\ \ddot{\emptyset}_{yi} \end{Bmatrix} \right) \tag{4.62}$$

veya kapalı olarak

$$\{\ddot{u}\} = [N]\{\ddot{d}\}_{(e)} \tag{4.63}$$

şeklinde gösterilir. Kinetik enerjiyi veren (4.35) denklemi matris formunda yazılacak olursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\delta T = \int_A \{\delta w, \delta\emptyset_x, \delta\emptyset_y\} \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\emptyset}_x \\ \ddot{\emptyset}_y \end{Bmatrix} dA \tag{4.64}$$

Bu denklem kapalı olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\delta T = \int_A \{\delta u\}^t \, [m] \, \{\ddot{u}\} \; dA \tag{4.65}$$

Burada $[m]$ kütlesel atalet momentlerini içeren matristir. (4.42) ve (4.63) denklemleri (4.65) denkleminde yerine konursa sonlu elemana ait virtüel kinetik enerjiyi veren denklem

$$\delta T_e = \{\delta d\}_{(e)}^t \left(\int_{Ae} ([N]^t [m][N]) dA \right) \{\ddot{d}\}_{(e)} \tag{4.66}$$

şeklinde elde edilir. (4.66) denklemi daha basit olarak

$$\delta T_e = \{\delta d\}^t_{(e)} [m]_e \{\ddot{d}\}_{(e)} \tag{4.67}$$

şeklinde gösterilir. Burada $[m]_e$ sonlu elemana ait kütle matrisidir. Sistemin virtüel kinetik enerjisini veren denklem sonlu elemanlara ait kinetik enerjilerin toplanması ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\delta T = \sum_{e=1}^{el} \delta T_e = \sum_{e=1}^{el} \{\delta d\}^t_{(e)} [m]_e \{\ddot{d}\}_{(e)} \tag{4.68}$$

Bu denklem sistemin düğüm deplasmanları cinsinden

$$\delta T = \{\delta D\}^t \left[\sum_{e=1}^{el} [m]_e\right] \{\ddot{D}\} = \{\delta D\}^t [M] \{\ddot{D}\} \tag{4.69}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $[M]$ sistem kütle matrisidir.

(4.56), (4.61) ve (4.69) denklemleri (4.20) denkleminde yerine konur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, virtüel işi veren denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\int_0^t \left[\{\delta D\}^T \left\{[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} - \{F\}\right\}\right] dt = 0 \tag{4.70}$$

Bu denklemde $\{dD\}$ deplasman varyasyonu olup aşağıdaki ifade dışarı çıkarılabilir.

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} - \{F\} = 0 \tag{4.71}$$

Burada $[M]$, $[K]$ ve $\{F\}$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$[M] = \sum_{e=1}^{el} [m]_e \tag{4.72}$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{el} [k]_e \tag{4.73}$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{el} \{f\}_e \tag{4.74}$$

(4.72), (4.73) ve (4.74) denklemlerinde $[m]_e$, eleman kütle matrisi, $[k]_e$, eleman rijitlik matrisi ve $\{f\}_e$ eleman yük vektörü aşağıdaki integrallerden hesaplanmaktadır.

$$[m]_e = \int_{Ae} [N]^T \, [m] \, [N] dA \tag{4.75}$$

$$[k]_e = \int_{Ae} \left(\left[B_f\right]^T [\mathcal{D}] \left[B_f\right] + [B_s]^T \, [\mathcal{A}] \, [B_s] \right) dA \tag{4.76}$$

$$\{f\}_e = \int_{Ae} [N]^T \{q\}_e \; dA \tag{4.77}$$

Burada [B_f] ve [B_s] ile gösterilen şekil değiştirme matrisleri (4.44) ve (4.47) denklemlerinde açık olarak gösterilmektedir. Bu matrislerde yer alan terimlerde, şekil fonksiyonlarının x ve y'ye göre kısmi türevleri ($N_{i,x}$, $N_{i,y}$) bulunmaktadır. Bu terimlerin hesaplanması için öncelikle şekil fonksiyonlarının, sırasıyla ξ ve η'ya göre kısmi türevleri elde edilir.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad (4.78.a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad (4.78.b)$$

Bu denklemler matris formunda

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (4.79)$$

olarak gösterilir. Bu denklem kısaca

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (4.80)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, [J], gerçek eleman ile referans elemanı arasında geçişi sağlayan Jacobian dönüşüm matrisidir.

Herhangi bir noktanın koordinatları şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde tarif edilebilir.

$$x = \sum_{i=1}^{8} N_i x_i \,, \qquad y = \sum_{i=1}^{8} N_i y_i \tag{4.81}$$

Jacobian dönüşüm matrisi, (4.81) denklemi yardımıyla şekil fonksiyonları cinsinden yazılacak olursa,

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \\ y_i \end{bmatrix} \right) \tag{4.82}$$

elde edilir. Şekil fonksiyonlarının *x,y* koordinatlarına göre türevleri, (4.80) denklemi yardımıyla

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \equiv [J^*] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{4.83}$$

olarak elde edilir. Burada $[J^*]$ Jacobian matrisinin tersi olup, aşağıda matris formunda verilmiştir.

$$[J^*] = \frac{1}{Det[J]} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

Burada, *Det*[*J*], Jacobian matrisinin determinantıdır. Jacobian matrisinin elemanları aşağıda açık olarak verilmiştir.

$$J_{11}^{*} = \frac{J_{22}}{Det[J]} \quad J_{12}^{*} = -\frac{J_{12}}{Det[J]} \quad J_{22}^{*} = \frac{J_{11}}{Det[J]} \quad J_{21}^{*} = \frac{J_{21}}{Det[J]} \tag{4.85}$$

x-y koordinat sistemindeki elemanter bir alan, (dA), Jacobian dönüşümü yardımıyla

$$dA \equiv dxdy = Det[J]d\xi d\eta \tag{4.86}$$

şeklinde ifade edilir.

Kartezyen koordinatlarda verilen (4.75), (4.76) ve (4.77) denklemleri ξ-η birim koordinatlarda

$$[m]_e = \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} [N]^T \, [m] \, [N] \, Det[J]d\xi d\eta \tag{4.87}$$

$$[k]_e = \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} \left(\left[B_f\right]^T [\mathcal{D}] \left[B_f\right] + [B_s]^T \, [\mathcal{A}_s] \, [B_s] \right) Det[J]d\xi d\eta \tag{4.88}$$

$$\{f\}_e = \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} [N]^T \{q\}_e \; Det[J]d\xi d\eta \tag{4.89}$$

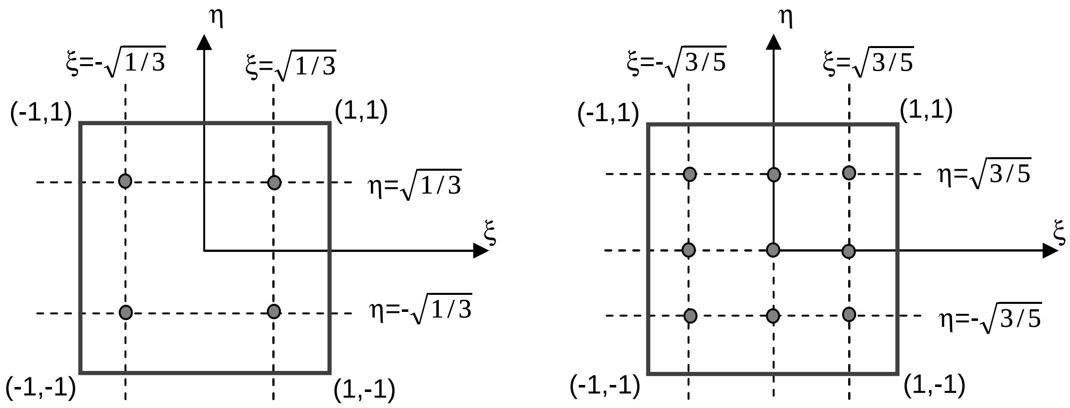
olarak elde edilir. Eleman kütle ve rijitlik matrisleri ile yük vektörü ifadelerinin integralleri standart Gauss sayısal integral yöntemi ile hesaplanmaktadır. Bu yönteme göre integraller aşağıdaki denklem ile elde edilir.

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} G(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \;=\; \int_{-1}^{+1}\left[\int_{-1}^{+1} G(\xi,\eta)\, d\eta\right] d\xi$$

$$\cong \int_{-1}^{+1}\left[\sum_{i=1}^{N} G(\xi,\eta_j) w_j\right] d\xi$$

$$\cong \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} G(\xi_i,\eta_j) w_i\, w_j \qquad (4.90)$$

(4.90) denkleminde M ve N sırasıyla ξ ve η doğrultularındaki Gauss noktası sayısıdır. Şekil 4.4'te 2x2 ve 3x3 Gauss noktası için integrasyon noktalarının yerleri gösterilmiş, Çizelge 4.1'de integrasyon noktası koordinatları ve integrasyon ağırlık değerleri verilmiştir.



Şekil 4.4. 2x2 ve 3x3 nokta sayısına göre Gauss integrasyon noktaları

Çizelge 4.1.Gauss integrasyon noktası koordinatları ve ağırlık değerleri

Gauss noktası sayısı	**İntegrasyon noktası koordinatları** x_i, h_j	**İntegrasyon ağırlık değerleri** w_i, w_j
2x2	$\pm\sqrt{1/3}$	1.00
3x3	0.00 $\pm\sqrt{3/5}$	8/9 5/9

Bu tezde eleman rijitlik matrisinin sayısal integrasyonunda, kayma kilitlenmesinin önlenmesi amacıyla, kayma terimlerinin hesabında azaltılmış integrasyon kullanılmıştır. 8 düğümlü elemanların eleman matrisleri hesabında, eğilme terimleri için 3x3, kayma terimleri için ise 2x2 Gauss noktası alınarak integrasyonlar yapılmaktadır.

4.3.2.3. Hareket Denkleminin Laplace Dönüşümü

Hareket denkleminin sağ tarafı çeşitli tiplerde zamanla değişen dinamik dış yüklerden oluşabilir. Zamana bağlı bir f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $\bar{F}(s)$,

$$L[f(t)] = \bar{F}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \tag{4.90}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada s, Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. Zamana göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerin Laplace dönüşümleri kapalı olarak

$$L\left[\dot{f}(t)\right] = s\bar{F}(s) - f(0) \tag{4.91}$$

$$L\left[\ddot{f}(t)\right] = s^2\bar{F}(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \tag{4.92}$$

şeklinde yapılmaktadır. Zamanla keyfi olarak değişen dış yükler altında sistem hareket denkleminin Laplace dönüşümü (4.90), (4.91) ve (4.92) tarifleri yardımıyla,

$$s^2[M]\{\bar{D}\} - s[M]\{D(0)\} - [M]\left\{\dot{D}(0)\right\} + [K]\{\bar{D}\} = \{\bar{F}\} \tag{4.93}$$

şeklinde yapılmaktadır. Burada, $\{\bar{D}\}$ ve $\{\bar{F}\}$ sırasıyla, sistem düğüm deplasman ve yük vektörlerinin Laplace dönüşümlerini temsil eder. $\{D(0)\}$ ve $\left\{\dot{D}(0)\right\}$ ise başlangıç deplasman ve hız vektörlerini göstermektedir. (4.93) denklemi yeniden düzenlenirse zamanla keyfi olarak değişen yükler altında lineer elastik bir cismin hareket denklemi,

$$\{\bar{D}\}\,(s^2[M] + [K]) - s[M]\{D(0)\} - [M]\{\dot{D}(0)\} = \{\bar{F}\} \tag{4.94}$$

olarak elde edilir. Bu denklem daha basit olarak,

$$[\bar{K}]\{\bar{D}\} = \{\bar{F}\} + \{\bar{F}_0\} \tag{4.95}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[\bar{K}]$ dönüşmüş uzayda dinamik rijitlik matrisi ve $\{\bar{F}_0\}$ başlangıç koşulları nedeniyle yük vektörüne gelen katkı olupaşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[\bar{K}] = s^2[M] + [K], \qquad \{\bar{F}_0\} = s[M]\{D(0)\} + [M]\{\dot{D}(0)\} \tag{4.96}$$

4.3.2.4. Sönüm Etkisi

Viskoelastik sistemlerde elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla sönüm etkisi dikkate alınabilmektedir (Boley ve Weiner, 1960). Kelvin tipi viskoelastik model için bünye ifadesi aşağıda verilmektedir.

$$S_{ij} = 2G\left(e_{ij} + g\frac{d\,e_{ij}}{dt}\right) \tag{4.97}$$

Burada G kayma modülü, g malzemenin viskoz sonüm oranıdır. Deviatorik gerilme tansörü, S_{ij}, ve deviatorik şekil değiştirme tansörü, e_{ij}, gerilme ve şekil değiştirme tansörünün deviatorik bileşenleri s_{ij} ve e_{ij} yardımı ile tanımlanır.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\,\frac{1}{3}\sigma_{kk}\,, \qquad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\,\frac{1}{3}\varepsilon_{kk} \tag{4.98}$$

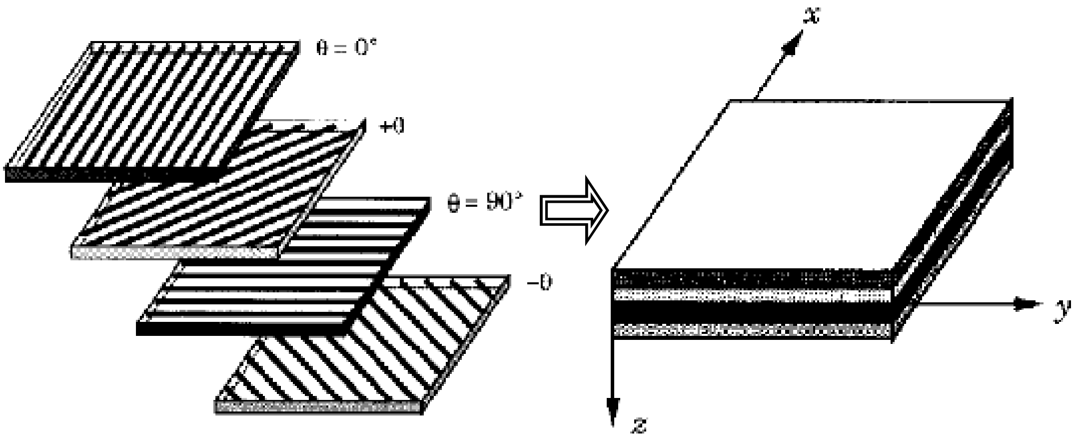
Burada, d_{ij}, Kronecker delta birim matrisin bileşenlerini göstermektedir. Viskoelastik çözüm, elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla Laplace dönüşüm uzayında elastik sabitlerin kompleks karşıtları ile yer değiştirmesi ile elde edilmektedir (Boley ve Weiner, 1960; Temel ve ark., 2004).

$$E_v = E(1 + g\,s)\ , \qquad G_v = G(1 + g\,s) \tag{4.99}$$

Burada E_v ve G_v viskoelastik malzeme sabitleri ve s Laplace dönüşüm parametresidir.

5. TABAKALI KALIN PLAKLAR

İki ya da daha fazla tabakadan oluşan kompozit plaklar, çok sayıda ince ortotropik tabakanın değişik doğrultularda istiflenmesiyle elde edilmektedir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. Çeşitli yönlenme açılarına ve tabaka dizilimine sahip plak

Kompozit plaklarda tabakaların istiflenme şekillerine bağlı olarak bazı sınıflandırmalar yapılmaktadır. Bu sınıflamalardan ilki yönlenme açısının durumuna bağlıdır. Yönlenme açısı 0^o veya 90^o olan tabakalı plağa dik-açılı tabakalı plak, yönlenme açısı $+\theta$ veya $-\theta$ ($0^o \leq \theta \leq 90^o$) olan tabakalı plağa ise eğik-açılı tabakalı plak adı verilir. Bir diğer sınıflandırma şekli, plak orta düzleminden (referans düzlemi) eşit uzaklıktaki tabakaların yönlenme açılarının karşılaştırılmasına göre yapılabilir. Eğik-açılı tabakalı plaklarda orta düzlemden eşit uzaklıktaki tabakaların aynı yönlenme açısına sahip olduğu plaklara simetrik tabakalı plak, orta düzlemden eşit uzaklıktaki tabakaların ters işaretli yönlenme açısına sahip olduğu plaklara ise antisimetrik tabakalı plak adı verilir. Dik-açılı tabakalı plaklar ise, orta düzlemden eşit uzaklıktaki tabakalar aynı yönlenme açısına sahipse simetrik, farklı yönlenme açısına sahipse antisimetrik tabakalı plak adını alır. Ayrıca kompozit plaklardaki tabakaların kalınlıklarına göre de düzenli veya düzensiz tabakalı plak şeklinde de sınıflandırma yapılabilmektedir.

Tabakalı kompozit plaklarda kalınlıkların düzlemsel boyutlara göre çok küçük olması nedeniyle analizlerde iki boyutlu teoriler kullanılabilmektedir. İki boyutlu teoriler, gerilmelerin veya deplasmanların plak kalınlığı boyunca değişimi hakkında bazı kabuller yapılarak, 3 boyutlu elastisite teorisinden elde edilir. Bu tip kompozit tabakalı plakların rijitlik matrisleri tabakalanma teorileri yardımıyla hesaplanabilir. Tabakalanma teorileri yardımı ile her bir tabaka dikkate alınarak kompozit plağın rijitlik matrisi elde edilir. Tabakalı kompozit plakların kayma direnci çok küçük olduğundan bu deformasyonların dikkate alınması gereklidir. Tabakalı kompozit plaklar için birinci mertebe kayma deformasyon teorisi, Mindlin plak teorisinin tabakalı kompozit plaklara uyarlanmış halidir. Bu teoriye göre, şekil değiştirmeden önce orta düzleme dik olan düzlem kesitler şekil değiştirmeden sonra da düzlem kalmakta, ancak dik kalmamaktadırlar. Bununla birlikte kayma birim deformasyonları kalınlık boyunca sabit kalmaktadır. Bu durum kayma gerilmelerinin plak alt ve üst yüzeylerinde sıfır olması şartı ile uyum sağlamaz. Bu hata Mindlin düzeltme katsayısı veya kayma düzeltme katsayısı olarak bilinen bir faktör ile giderilmektedir. Klasik tabakalı kompozit plaklara benzer şekilde orta düzleme dik uzaklıklar değişmez. Diğer bir deyişle tabakalı kompozit kalınlığının değişmediği kabul edilir. Yani tabakalı kompozitin düzlemine dik birim deformasyonu ε_z, düzlem içindeki birim deformasyonlar ε_x ve ε_y ile karşılaştırıldığında ihmal edilir.

5.1. Tek Tabaka İçin Gerilme Birim Deformasyon İlişkisi

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre gerilme ile birim deformasyon arasındaki ilişkiyi veren (4.6) denklemi eğilme ve kayma terimleri yeniden sıralanarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

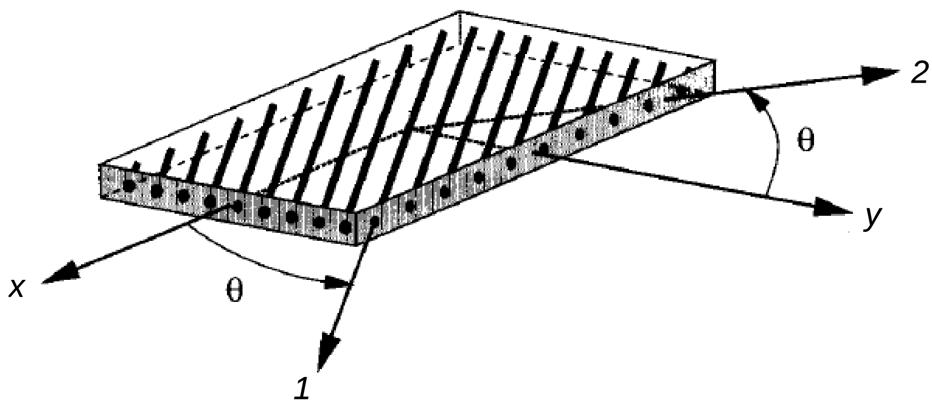
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{66} & 0 & 0 \\ & sim. & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

Bu denklem daha basit olarak

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \tag{5.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[Q]$, elastiklik matrisidir.

Tabakalı plaklarda malzeme yönlenme açısı tabakadan tabakaya değişebilir. Bu tür açılı plaklar için gerilme-birim deformasyon ilişkisinin genelleştirilmesi gerekmektedir. Açılı tabakalar için verilen koordinat sistemi Şekil 5.2'de görülmektedir. 1-2 koordinat takımındaki aks, yerel aks veya malzeme aksı olarak adlandırılır. 1 doğrultusu boyuna doğrultu ve 2 doğrultusu enine doğrultudur. x–y doğrultuları sistemin asal doğrultularıdır. İki koordinat sistemi arasında θ açısı bulunmaktadır.



Şekil 5.2. Açılı tabakaya sahip malzemelerde sistem ve yerel eksenler

x-y koordinatlarındaki gerilme terimleri ile bu koordinat ile belirli bir θ açısı yapan 1-2 koordinatlarındaki (malzeme eksenleri) gerilme terimleri arasında aşağıdaki ilişki verilmiştir (Staab, 1998).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = [T_\sigma] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.3}$$

Burada $[T_\sigma]$, gerilmeler arasındaki transformasyon matrisi olup açık olarak aşağıda verilmiştir.

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Gerilmeye benzer şekilde x-y koordinatlarındaki birim deformasyon terimleri ile bu koordinatlarla belirli bir θ açısı yapan 1-2 koordinatlarındaki birim deformasyon terimleri arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = [T_\varepsilon] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \tag{5.5}$$

Burada $[T_\varepsilon]$, birim deformasyonlar arasındaki transformasyon matrisi olup, açık olarak aşağıda verilmiştir:

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

(5.3) ve (5.5) denklemleri (5.2) denkleminde yerine konur ve düzenlenirse aşağıdaki denklemi elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [T_\sigma]^{-1}[Q]\,[T_\varepsilon] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

(5.7) denklemindeki $[T_\sigma]^{-1}[Q]\,[T_\varepsilon]$ çarpımı yapılırsa

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \overline{Q}_{66} & 0 & 0 \\ & sim. & & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ & & & & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

İfadesi elde edilir. Bu denklem daha basit olarak

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [\overline{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.9}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $[\overline{Q}]$, dönüşüme uğramış elemanın indirgenmiş elastiklik matrisi veya dönüşüme uğramış elemanın indirgenmiş rijitlik matrisi olarak adlandırılır. Bu matrise ait terimler açık olarak aşağıda verilmektedir.

$$
\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\
\overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\
\overline{Q}_{44} &= Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \\
\overline{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})\sin\theta\cos\theta \\
\overline{Q}_{55} &= Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

(5.8) bağıntısı düzlem içi ve düzlem dışı terimler dikkate alınarak iki matris şeklinde gösterilebilir. Sadece düzlem içi gerilmeler dikkate alınırsa düzlem gerilme durumu oluşur.

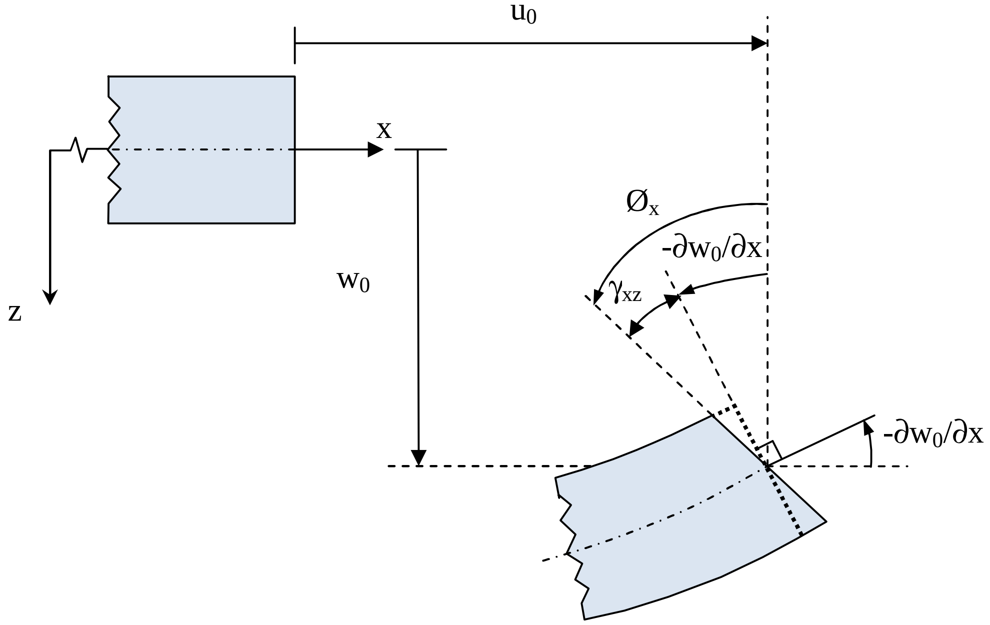
$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ sim. & & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.11}
$$

Düzlem dışındaki gerilmeler kayma deformasyonu etkisini gösterir.

$$
\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ sim. & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.12}
$$

5.2. Tabakalı Kompozit Plakta Gerilme-Birim Deformasyon İlişkisi

Şekil 5.3'te tabakalı bir kompozit plak kesitinin deformasyon öncesi ve sonrasında xz-düzlemindeki yer değiştirmeler gösterilmiştir.



Şekil 5.3. BKDT'sine göre plağın şekil değiştirmesi

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre yer değiştirme bileşenleri şu şekilde belirlenmektedir.

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z\,\emptyset_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z\,\emptyset_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \qquad (5.13)$$

Burada u, v ve w plağın (x, y, z) noktasındaki yer değiştirmeleri, $(u_0, v_0, w_0, \emptyset_x, \emptyset_y)$ ise genelleştirilmiş deplasmanlardır. u_0 ve v_0 orta düzlemin x ve y yönlerindeki yer değiştirmeleri, w_0 ise orta düzlemin plak düzlemine dik olan yer değiştirmesidir. $\emptyset_x$ ve $\emptyset_y$ ise, sırasıyla, y ve x eksenleri etrafındaki dönmeler olup, aşağıdaki şekilde ifade edilirler.

$$\emptyset_x = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \emptyset_y = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad (5.14)$$

Tabakalı kompozit bir plakta oluşan birim deformasyonlar en genel halde aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{5.15}$$

(5.13) ve (5.14) denklemleri (5.15) denkleminde yerlerine konursa birim deformasyonlar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} - z\dfrac{\partial \emptyset_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} - z\dfrac{\partial \emptyset_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} - z\left(\dfrac{\partial \emptyset_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \emptyset_y}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial y} - \emptyset_y \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x} - \emptyset_x \end{Bmatrix} \tag{5.16}$$

(5.16) denklemi daha basit olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 + z\kappa_x \\ {\varepsilon_y}^0 + z\kappa_y \\ {\gamma_{xy}}^0 + z\kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

Bu denklemde uzama şekil değiştirmeleri aşağıdaki şekilde:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$

veya kapalı formda

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_p\} + \{\varepsilon_f\} = \{\varepsilon_p\} + z\,\{\kappa\} \tag{5.19}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\{\varepsilon_p\}$, orta düzlemdeki şekil değiştirmeler olup,

$$\{\varepsilon_p\} = \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

şeklinde, $\{\varepsilon_f\}$ ise, eğrilik nedeniyle oluşan şekil değiştirmeler olup,

$$\{\varepsilon_f\} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial \emptyset_x}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \emptyset_y}{\partial y} \\ -\left(\dfrac{\partial \emptyset_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \emptyset_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \tag{5.21}$$

şeklindedir. Kayma şekil değiştirmeleri ise, aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.22}$$

(5.17) denklemi (5.8) denkleminde yerine konursa tabakalı kompozit plakta, orta düzlemden “z” kadar uzaklıktaki herhangi bir tabakadaki gerilmeleri veren denklem orta düzlemin şekil değiştirmeleri ve eğrilikleri yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \overline{Q}_{66} & 0 & 0 \\ & sim. & & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ & & & & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 + z\,\kappa_x \\ {\varepsilon_y}^0 + z\,\kappa_x \\ {\gamma_{xy}}^0 + z\,\kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.23}$$

(5.23) denklemi eğilme ve kayma terimleri ayrı ayrı olacak şekilde düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ sim. & & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 + z\,\kappa_x \\ {\varepsilon_y}^0 + z\,\kappa_x \\ {\gamma_{xy}}^0 + z\,\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.24}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

Bu denklemler daha basit olarak

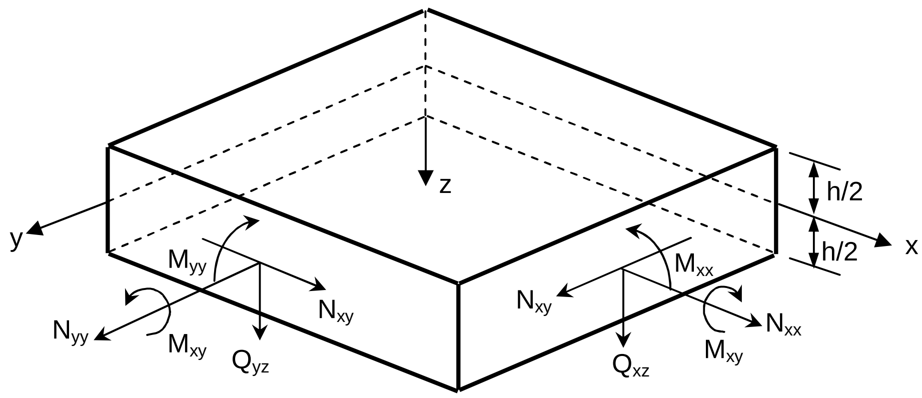
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left[\overline{Q}_{\sigma}\right] \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 + z\,\kappa_x \\ {\varepsilon_y}^0 + z\,\kappa_x \\ {\gamma_{xy}}^0 + z\,\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \left[\overline{Q}_{\tau}\right] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{5.27}$$

şeklinde gösterilebilir.

5.3. Tabakalı Kompozit Plağa Etki Eden Bileşke Kuvvetler ve Momentler

Tabakalı kompozit bir plağın birim uzunluğuna etkiyen bileşke kuvvetler ve momentler, her bir tabakadaki gerilmelerin plak kalınlığı boyunca integre edilmesiyle elde edilir. Tek tabakalı bir plağın birim uzunluğuna etkiyen bileşke kuvvetler ve momentler Şekil 5.4'te gösterilmiştir.



Şekil 5.4. Tek tabakalı bir plağın birim uzunluğuna etkiyen bileşke kuvvetler ve momentler

Burada *N*, *M* ve *Q* sırasıyla levha enine kesitinin birim genişliğine etkiyen normal kuvvetler, momentler ve kesme kuvvetleridir. Tek tabakalı bir plağın levha enine kesitinin birim genişliği başına etkiyen normal kuvvetler, (5.28) denklemi ile ifade edilmektedir. Tek tabakalı bir ortotropik plak için verilen levha enine kesitinin birim genişliği başına etkiyen momentler ve kesme kuvvetleri için verilen (4.23) ve (4.24) denklemleri burada da kullanılmaktadır.

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz \\ \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz \\ \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

Tabakalı kompozit bir plağın birim uzunluğuna etkiyen bileşke kuvvet ve momentler ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \tag{5.29}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z\, dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z\, dz \tag{5.30}$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz = K \sum_{k=1}^{N} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k dz \tag{5.31}$$

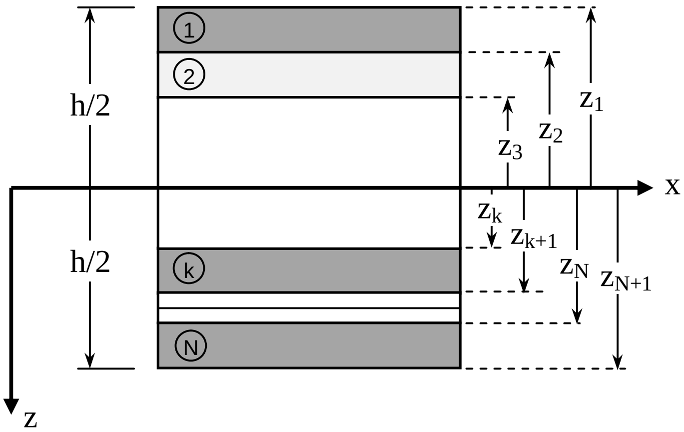
Burada *K*, Mindlin kayma düzeltme faktörü olup, 5/6 olarak dikkate alınacaktır. (5.26) ve (5.27) ifadeleri (5.29), (5.30) ve (5.31) denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\overline{Q}_{\sigma}\right]_k \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} dz + \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z\, dz \right\} \tag{5.32}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\overline{Q}_{\sigma}\right]_k \left\{ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} z\, dz + \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2\, dz \right\} \tag{5.33}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = K \sum_{k=1}^{N} \left[\overline{Q}_{\tau}\right]_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} dz \tag{5.34}$$

denklemleri elde edilir. Burada z_k ve z_{k+1} k’nıncı tabakanın orta düzleme olan uzaklıklarını verir. Bu uzaklıklar Şekil 5.5’te gösterilmiştir.



Şekil 5.5. Tabakalı kompozit bir plakta tabakaların orta düzleme göre durumları ve koordinatları

(5.32), (5.33) ve (5.34) denklemlerinde birim şekil değiştirmeler, eğrilikler z'ye bağlı olmayıp *x* ve *y*'nin fonksiyonudur. Bu yüzden bu denklemlerde integral içindeki ifadeler dışarı çıkarılabilir.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\overline{Q}_{\sigma}\right]_k \left\{ \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz + \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z \; dz \right\} \tag{5.35}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\overline{Q}_{\sigma}\right]_k \left\{ \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z \, dz + \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z^2 \; dz \right\} \tag{5.36}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = K \sum_{k=1}^{N} \left[\overline{Q}_{\tau}\right]_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz \tag{5.37}$$

(5.35) (5.36) ve (5.37) denklemlerindeki integraller alınırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

Bu denklemler daha basit gösterimle

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathcal{A}] \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} + [\mathcal{B}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathcal{B}] \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \end{Bmatrix} + [\mathcal{D}] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = [\mathcal{A}_S] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

olarak veya kapalı formda

$$\{N\} = [\mathcal{A}]\{\varepsilon_p\} + [\mathcal{B}]\{\kappa\} \quad (5.44)$$

$$\{M\} = [\mathcal{B}]\{\varepsilon_p\} + [\mathcal{D}]\{\kappa\} \quad (5.45)$$

$$\{Q\} = [\mathcal{A}_S]\{\gamma\} \quad (5.46)$$

şeklinde yazılabilir. (5.44) ve (5.45) denklemleri birleştirilerek aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathcal{A}] & [\mathcal{B}] \\ [\mathcal{B}] & [\mathcal{D}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_p\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \tag{5.47}$$

Burada $[\mathcal{A}], [\mathcal{B}], [\mathcal{D}]$ ve $[\mathcal{A}_s]$ matrisleri sırasıyla, uzama, eğilme-uzama etkileşim, eğilme ve kayma rijitliklerini ifade eder. Bu matrislerin elemanları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{k}^{k+1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \qquad i,j = 1,2,6 \tag{5.48}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{k}^{k+1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z \ dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \qquad i,j = 1,2,6 \tag{5.49}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{k}^{k+1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \qquad i,j = 1,2,6 \tag{5.50}$$

$$(A_s)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} K \int_{k}^{k+1} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz = K \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \qquad i,j = 4,5 \tag{5.51}$$

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre birim genişliğe etkiyen iç kuvvetler toplu olarak aşağıda verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {\varepsilon_x}^0 \\ {\varepsilon_y}^0 \\ {\gamma_{xy}}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \qquad (5.52)$$

5.4. Tabakalı Plak Hareket Denklemleri

Tabakalı plak harekt denklemleri, dinamik yükleme durumu için virtüel yer değiştirme ilkesi yardımı ile elde edilebilir. Virtüel yer değiştirme ilkesi (4.20) denkleminde verilmiştir. (5.18) denklemi (4.21) denkleminde yerine konur ve plak kalınlığı boyunca integral alınırsa şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\delta U = \int_A (N_{xx}\delta {\varepsilon_x}^0 + N_{yy}\delta {\varepsilon_y}^0 + N_{xy}\delta {\gamma_{xy}}^0 + M_{xx}\delta\kappa_x + M_{yy}\delta\kappa_y + M_{xy}\delta\kappa_{xy}$$

$$+Q_{yz}\delta\gamma_{yz} + Q_{xz}\delta\gamma_{xz})dA \qquad (5.53)$$

Bu ifade daha basit olarak

$$\delta U = \int_A \left(\left\{\delta\varepsilon_p\right\}^t \{N\} + \{\delta\kappa\}^t\{M\} + \{\delta\gamma\}^t\{Q\} \right) dA \qquad (5.54)$$

şeklinde gösterilebilir.

Plak yüzeyine dik etki eden dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş

$$\delta V = -\int_A q\delta w_0 dA \qquad (5.55)$$

denkleminden elde edilir. Burada q, tabakalı plakta en üst tabakaya etki eden yayılı yükü gösterir.

Benzer şekilde kinetik enerji ifadesi (4.32) denklemi ile elde edilir. (5.13) denklemi (4.32) denkleminde yerine konur ve kalınlık boyunca integral alınırsa plağa ait kinetik enerji aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\delta T = \int_A [I_0(\ddot{u}_0\delta u_0 + \ddot{v}_0\delta v_0 + \ddot{w}_0\delta w_0)$$
$$-I_1\left(\ddot{\emptyset}_x\delta u_0 + \ddot{\emptyset}_y\delta v_0 + \ddot{u}_0\delta\emptyset_x + \ddot{v}_0\delta\emptyset_y\right)$$
$$+I_2\left(\ddot{\emptyset}_x\delta\emptyset_x + \ddot{\emptyset}_y\delta\emptyset_y\right)\Big]dA \tag{5.56}$$

Burada I_0, I_1 ve I_2 kütlesel atalet momentleri olup, aşağıdaki integrallerden hesaplanır.

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (\rho, \rho z, \rho z^2)dz = \rho\left(h, \frac{h^2}{4}, \frac{h^3}{12}\right) \tag{5.57}$$

(5.57) ifadesi yeniden düzenlenerek

$$\delta T = \int_A \Big\{\left(I_0\ddot{u}_0 - I_1\ddot{\emptyset}_x\right)\delta u_0 + \left(I_0\ddot{v}_0 - I_1\ddot{\emptyset}_y\right)\delta v_0 + I_0\ddot{w}_0\delta w_0$$
$$+\left(I_2\ddot{\emptyset}_x - I_1\ddot{u}_0\right)\delta\emptyset_x + \left(I_2\ddot{\emptyset}_y - I_1\ddot{v}_0\right)\delta\emptyset_y\Big\}\, dA \tag{5.58}$$

şeklinde yazılabilir.

(5.53), (5.55) ve (5.56) denklemlerini (4.20) denkleminde yerlerine konursa virtüel işi veren ifade

$$\int_0^t \Bigg(\int_A \{ N_{xx}\delta\varepsilon_{x0} + N_{yy}\delta\varepsilon_{y0} + N_{xy}\delta\gamma_{xy0} + M_{xx}\delta\kappa_x + M_{yy}\delta\kappa_y + M_{xy}\delta\kappa_{xy}$$
$$+Q_{yz}\delta\gamma_{yz} + Q_{xz}\delta\gamma_{xz} - q\delta w_0$$
$$-I_0(\ddot{u}_0\delta u_0 + \ddot{v}_0\delta v_0 + \ddot{w}_0\delta w_0)$$
$$+I_1\big(\ddot{\emptyset}_x\delta u_0 + \ddot{\emptyset}_y\delta v_0 + \ddot{u}_0\delta\emptyset_x + \ddot{v}_0\delta\emptyset_y\big)$$
$$-I_2\big(\ddot{\emptyset}_x\delta\emptyset_x + \ddot{\emptyset}_y\delta\emptyset_y\big)\big\}\, dA \Bigg) dt = 0 \tag{5.59}$$

şeklinde veya (5.54), (5.58) denklemlerini kullanarak daha basit olarak

$$\int_0^t \Bigg(\int_A \Big\{ \{\delta\varepsilon_p\}^t\{N\} + \{\delta\kappa\}^t\{M\} + \{\delta\gamma\}^t\{Q\} - q\delta w_0$$
$$-\big(I_0\ddot{u}_0 - I_1\ddot{\emptyset}_x\big)\delta u_0 - \big(I_0\ddot{v}_0 - I_1\ddot{\emptyset}_y\big)\delta v_0 - I_0\ddot{w}_0\delta w_0$$
$$-\big(I_2\ddot{\emptyset}_x - I_1\ddot{u}_0\big)\delta\emptyset_x - \big(I_2\ddot{\emptyset}_y - I_1\ddot{v}_0\big)\delta\emptyset_y\Big\}\, dA\Bigg)\, dt \tag{5.60}$$

şeklinde elde edilir.

5.5. BKDT'sine Göre Tabakalı Kompozit Plakların Sonlu Eleman Formülasyonu

5.5.1. Şekil Değiştirmeler

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre herhangi bir noktadaki deplasmanlar, $\{u\} = \{u_0, v_0, w_0, \emptyset_x, \emptyset_y\}^{\mathrm{T}}$, şekil fonksiyonları yardımı ile aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{n} N_i u_{0i} \qquad v_0 = \sum_{i=1}^{n} N_i v_{0i} \qquad w_0 = \sum_{i=1}^{n} N_i w_{0i}$$

$$\emptyset_x = \sum_{i=1}^{n} N_i \emptyset_{xi} \qquad \emptyset_y = \sum_{i=1}^{n} N_i \emptyset_{yi} \tag{5.61}$$

Burada *n*, her elemandaki düğüm sayısı olup, elemandaki düğüm noktalarındaki deplasmanlar, $\{d\}_e = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \emptyset_{xi}, \emptyset_{yi}\}^{\mathrm{T}}$ şeklindedir. Formülasyonda 8 düğümlü sonlu eleman kullanılacaktır. Plağın herhangi bir noktadasındaki deplasmanlar matris formunda

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \emptyset_x \\ \emptyset_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \emptyset_{xi} \\ \emptyset_{yi} \end{Bmatrix} \tag{5.62}$$

veya kapalı olarak

$$\{u\} = [N]\{d\}_{(e)} \tag{5.63}$$

şeklinde gösterilir. Burada N_i şekil fonksiyonları (4.39) denkleminde verilmiştir. Herhangi bir noktadaki deplasmanların değişimi ise

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta d\}_{(e)}\,, \qquad \{\delta u\}^t = \{\delta d\}_{(e)}^t [N]^t \tag{5.64}$$

olarak ifade edilir. Plak orta düzlemindeki şekil değiştirmeler ve eğrilikler, şekil fonksiyonları yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\varepsilon_x{}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} = \sum_{i=1}^{8} N_{i,x} u_{0i}$$

$$\varepsilon_y{}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} = \sum_{i=1}^{8} N_{i,y} v_{0i}$$

$$\gamma_{xy}{}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = \sum_{i=1}^{8} \left(N_{i,y} u_{0i} + N_{i,x} v_{0i} \right)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial \emptyset_x}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{8} N_{i,x} \emptyset_{xi}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial \emptyset_y}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{8} N_{i,y} \emptyset_{yi}$$

$$\kappa_{xy} = -\left(\frac{\partial \emptyset_x}{\partial y} + \frac{\partial \emptyset_y}{\partial x} \right) = -\sum_{i=1}^{8} \left(N_{i,y} \theta_{xi} + N_{i,x} \theta_{yi} \right)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \emptyset_y = \sum_{i=1}^{8} \left(N_{i,y} w_{0i} - N_i \emptyset_{yi} \right)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} - \emptyset_x = \sum_{i=1}^{8} \left(N_{i,x} w_{0i} - N_i \emptyset_{xi} \right) \qquad (5.65)$$

olarak elde edilir. Birim deplasmanlar düzenlenerek matris formunda

$$\{\varepsilon_p\} = \sum_{i=1}^{8} \left(\begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \emptyset_{xi} \\ \emptyset_{yi} \end{Bmatrix} \right) \qquad (5.66)$$

veya kapalı olarak

$$\{\varepsilon_p\} = [B_a]\{d\}_{(e)} \qquad (5.67)$$

şeklinde gösterilir. Birim uzamaların değişimi ise aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\{\delta\varepsilon_p\} = [B_a]\{\delta d\}_{(e)}, \qquad \{\delta\varepsilon_p\}^t = \{\delta d\}_{(e)}^t[B_a]^t \tag{5.68}$$

Benzer şekilde eğrilikler şekil fonksiyonları yardımıyla matris formunda:

$$\{\kappa\} = \sum_{i=1}^{8}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \emptyset_{xi} \\ \emptyset_{yi} \end{Bmatrix}\right) \tag{5.69}$$

şeklinde veya kapalı formda

$$\{\kappa\} = [B_f]\{d\}_{(e)} \tag{5.70}$$

olarak yazılabilir. Eğriliklerin değişimi ise

$$\{\delta\kappa\} = [B_f]\{\delta d\}_{(e)}, \qquad \{\delta\kappa\}^t = \{\delta d\}_{(e)}^t[B_f]^t \tag{5.71}$$

şeklinde tanımlanır.

Kayma şekil değiştirmeleri, şekil fonksiyonları yardımıyla matris formunda

$$\{\gamma\} = \sum_{i=1}^{8}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & -N_i \\ 0 & 0 & N_{i,x} & -N_i & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_{0i} \\ \emptyset_{xi} \\ \emptyset_{yi} \end{Bmatrix}\right) \tag{5.72}$$

şeklinde veya kapalı formda

$$\{\gamma\} = [B_s]\{d\}_{(e)} \tag{5.73}$$

olarak gösterilebilir. Kayma şekil değiştirmelerinin değişimi ise

$$\{\delta\gamma\} = [B_s]\{\delta d\}_{(e)}, \qquad \{\delta\gamma\}^t = \{\delta d\}_{(e)}^t[B_s]^t \tag{5.74}$$

şeklinde ifade edilir.

(5.66), (5.69) ve (5.72) denklemleri birleştirilerek aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{Bmatrix}\{\varepsilon\}\\ \{\kappa\}\\ \{\gamma\}\end{Bmatrix} = [B]\{d\}_{(e)}$$

$$= \sum_{i=1}^{8}\left(\begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0\\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{i,y}\\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} & -N_{i,x}\\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & -N_i\\ 0 & 0 & N_{i,x} & -N_i & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{0i}\\ v_{0i}\\ w_{0i}\\ \emptyset_{xi}\\ \emptyset_{yi}\end{Bmatrix}\right) \tag{5.75}$$

5.5.2. Virtüel İş İfadesi

Sisteme ait virtüel iş; virtüel şekil değiştirme enerjisin, dış kuvvetlerin yaptığı iş ve kinetik enerjinin sonlu eleman ağındaki her eleman için ayrı ayrı oluşturulup uygun biçimde toplanmasından elde edilir.

(5.44), (5.45) ve (5.46) denklemlerinin (5.54) denkleminde yerlerine konması ve böylece elde edilen denklemin sonlu eleman için yazılması ile elemana ait virtüel şekil değiştirme enerjisi elde edilir.

$$\delta U_e = \int_{Ae}\Big\{\{\delta\varepsilon_p\}^t([\mathcal{A}]\,\{\varepsilon_p\} + [\mathcal{B}]\{\kappa\}) + \{\delta\kappa\}^t([\mathcal{B}]\,\{\varepsilon_p\} + [\mathcal{D}]\{\kappa\})$$

$$+ \{\delta\gamma\}^t[\mathcal{A}_S]\{\gamma\}\Big\}\,dA \tag{5.76}$$

(5.67), (5.70) ve (5.73) denklemleri (5.76) denkleminde yerlerine konursa

$$\delta U_e = \int_{Ae} \Big\{ \{\delta \varepsilon_p\}^t \big([\mathcal{A}]\,[B_a] + [\mathcal{B}][B_f]\big)\{d\}_{(e)}$$
$$+ \{\delta\kappa\}^t\big([\mathcal{B}]\,[B_a] + [\mathcal{D}][B_f]\big)\{d\}_{(e)}$$
$$+ \{\delta\gamma\}^t[\mathcal{A}_s][B_s]\{d\}_{(e)} \Big\}\, dA \qquad (5.77)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.68), (5.71) ve (5.74) denklemleri (5.77) denkleminde yerlerine konursa sonlu eleman ait virtüel şekil değiştirme enerjisi:

$$\delta U_e = \{\delta d\}^t_{(e)} \Big[\int_{Ae} \big\{ [B_a]^t[\mathcal{A}]\,[B_a] + [B_a]^t[\mathcal{B}][B_f] + [B_f]^t[\mathcal{A}]\,[B_a]$$
$$+ [B_f]^t\,[\mathcal{D}][B_f] + [B_s]^t[\mathcal{A}_s][B_a] \big\} dA \Big]\, \{d\}_{(e)} \qquad (5.78)$$

olarak elde edilir. Bu denklem sadece bir sonlu elemana ait virtüel şekil değiştirme enerjisini verir. Bu denklem daha basit olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\delta U_e = \{\delta d\}^t_{(e)}[k]_e\, \{d\}_{(e)} \qquad (5.79)$$

Burada $[k]_e$ sonlu elemana ait rijitlik matrisidir. (5.79) denkleminin (4.50) denkleminde yerine konulması ile sistemin virtüel şekil değiştirme enerjisini veren denklem elde edilir.

$$\delta U = \sum_{e=1}^{el} \delta U_e = \sum_{e=1}^{el} \{\delta d\}^t_{(e)}[k]_e\, \{d\}_{(e)} \qquad (5.80)$$

Sistemin virtüel şekil değiştirme enerjisini veren denklem, sistemin düğüm deplasmanları cinsinden en genel halde

$$\delta U = \{\delta D\}^t \left[\sum_{e=1}^{el} [k]_e \right] \{D\} = \{\delta D\}^t [K]\, \{D\} \qquad (5.81)$$

olarak gösterilir. Burada [K], sistem rijitlik matrisini, $\{D\}$ ise sistem düğüm deplasmanlarını gösterir.

Dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işi gösteren (5.56) denklemi şekil fonksiyonları yardımıyla sonlu eleman için yazılırsa

$$\delta V_e = -\int_{Ae} \{q\}_e [N] \{\delta d\}_{(e)} = -\{\delta d\}_{(e)}^t \int_{Ae} [N]^t \{q\}_e dA \tag{5.82}$$

elde edilir. Burada $\{q\}_e$ sonlu elemana etki eden yayılı yük vektörü olup aşağıda açık olarak verilmiştir.

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.83}$$

(5.82) ifadesi daha basit olarak

$$\delta V_e = -\{\delta d\}_{(e)}^t \{f\}_e \tag{5.84}$$

şeklinde gösterilir. Burada $\{f\}_e$ sonlu elemana ait düğüm yük vektörüdür. Dış kuvvetlerin sistem üzerinde yaptığı virtüel işi gösteren denklem ise (5.84) ve (4.51) denklemleri yardımı ile

$$\delta V = \sum_{e=1}^{el} \delta V_e = -\sum_{e=1}^{el} \{\delta d\}_{(e)}^t \{f\}_e \tag{5.85}$$

olarak elde edilir. Bu denklem en genel halde

$$\delta V = -\{\delta D\}^t \left[\sum_{e=1}^{el} \{f\}_e \right] = -\{\delta D\}^t \{F\} \tag{5.86}$$

şeklinde gösterilir. Burada $\{F\}$, sisteme ait düğüm yük vektörünü temsil eder.

Herhangi bir noktadaki ivmeler, $\{\ddot{u}\} = \{\ddot{u}_0, \ddot{v}_0, \ddot{w}_0, \ddot{\emptyset}_x, \ddot{\emptyset}_y\}^{\mathrm{T}}$, şekil fonksiyonları yardımı ile

$$\{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{v}_0 \\ \ddot{w}_0 \\ \ddot{\emptyset}_x \\ \ddot{\emptyset}_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} \left(\begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{0i} \\ \ddot{v}_{0i} \\ \ddot{w}_{0i} \\ \ddot{\emptyset}_{xi} \\ \ddot{\emptyset}_{yi} \end{Bmatrix} \right) \tag{5.87}$$

veya kapalı formda

$$\{\ddot{u}\} = [N]\{\ddot{d}\}_{(e)} \tag{5.88}$$

şeklinde gösterilir. Kinetik enerjiyi veren (5.58) denklemi matris formunda yazılacak olursa

$$\delta T = \int_A \{\, \delta u, \delta v, \delta w, \delta\emptyset_x, \delta\emptyset_y\} \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & -I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & -I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ -I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & -I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{v}_0 \\ \ddot{w}_0 \\ \ddot{\emptyset}_x \\ \ddot{\emptyset}_y \end{Bmatrix} dA \tag{5.89}$$

veya kapalı formda

$$\delta T = \int_A \{\delta u\}^t \, [m] \, \{\ddot{u}\} \; dA \tag{5.90}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $[m]$ kütlesel atalet momentleri içeren matristir. (5.88) ve (5.64) denklemleri (5.90) denkleminde yerlerine konursa sonlu elemana ait virtüel kinetik enerjiyi veren denklem:

$$\delta T_e = \{\delta d\}_{(e)}^t \left(\int_{Ae} ([N]^t [m][N]) dA \right) \{\ddot{d}\}_{(e)} \tag{5.91}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade daha basit olarak

$$\delta T_e = \{\delta d\}_{(e)}^t [m]_e \{\ddot{d}\}_{(e)} \tag{5.93}$$

şeklinde gösterilir. Burada $[m]_e$ sonlu elemana ait kütle matrisidir. Sistemin virtüel kinetik enerjisini veren denklem sonlu elemanlara ait kinetik enerjilerin toplanması ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\delta T = \sum_{e=1}^{el} \delta T_e = \sum_{e=1}^{el} \{\delta d\}_{(e)}^t [m]_e \{\ddot{d}\}_{(e)} \tag{5.94}$$

Bu denklem sistem düğüm deplasmanları cinsinden

$$\delta T = \{\delta D\}^t \left[\sum_{e=1}^{el} [m]_e \right] \{\ddot{D}\} = \{\delta D\}^t [M] \{\ddot{D}\} \tag{5.95}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $[M]$ sistem kütle matrisidir.

(5.81), (5.86) ve (5.95) denklemleri (4.20) denkleminde yerine konur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa virtüel işi veren denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\int_0^t \left[\{\delta D\}^T \left\{ [M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} - \{F\} \right\} \right] dt = 0 \tag{5.96}$$

Bu denklemde $\{\delta D\}$ deplasman varyasyonunu olup, aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} - \{F\} = 0 \tag{5.97}$$

Burada $[M]$, $[K]$ ve $\{F\}$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$[M] = \sum_{e=1}^{el} [m]_e \tag{5.98}$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{el} [k]_e \tag{5.99}$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{el} \{f\}_e \tag{5.100}$$

(5.98), (5.99) ve (5.100) denklemlerinde $[m]_e$, eleman kütle matrisi, $[k]_e$, eleman rijitlik matrisi ve $\{f\}_e$ eleman yük vektörü aşağıdaki integrallerden hesaplanmaktadır.

$$[m]_e = \int_{Ae} [N]^T\,[m]\,[N]dA \tag{5.101}$$

$$[k]_e = \int_{Ae} \big([B_a]^T[\mathcal{A}]\,[B_a] + [B_a]^T[\mathcal{B}]\,[B_f] + [B_f]^T[\mathcal{A}]\,[B_a] + [B_f]^T[\mathcal{D}]\,[B_f] + [B_s]^T\,[\mathcal{A}_s]\,[B_s]\big)dA \tag{5.102}$$

$$\{f\}_e = \int_{Ae} [N]^T\{q\}_e\; dA \tag{5.103}$$

Kartezyen koordinatlarda verilen (5.101), (5.102) ve (5.103) denklemleri ξ-η birim koordinatlarda

$$[m]_e = \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} [N]^T \, [m] \, [N] \, Det[J] d\xi d\eta \tag{5.104}$$

$$[k]_e = \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} \Big([B_a]^T [\mathcal{A}] \, [B_a] + [B_a]^T [\mathcal{B}] \, [B_f] + [B_f]^T [\mathcal{A}] \, [B_a]$$

$$+ [B_f]^T [\mathcal{D}] \, [B_f] + [B_s]^T \, [\mathcal{A}_s] \, [B_s]\Big) det[J] d\xi d\eta \tag{5.105}$$

$$\{f\}_e = \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\xi=-1}^{+1} [N]^T \{q\}_e \; Det[J] d\xi d\eta \tag{5.106}$$

olarak elde edilir.

(5.97) denkleminin Laplace dönüşümü alınınca

$$s^2[M]\{\bar{D}\} - s[M]\{D(0)\} - [M]\{\dot{D}(0)\} + [K]\{\bar{D}\} = \{\bar{F}\} \tag{5.107}$$

ifadesi elde edilmektedir. Burada, $\{\bar{D}\}$ ve $\{\bar{F}\}$ sırasıyla, sistem düğüm deplasman ve yük vektörlerinin Laplace dönüşümlerini temsil eder. $\{D(0)\}$ ve $\{\dot{D}(0)\}$ ise başlangıç deplasman ve hız vektörlerini göstermektedir. (5.107) denklemi yeniden düzenlenirse zamanla keyfi olarak değişen yükler altında tabakalı kompozit plağın hareket denklemi,

$$\{\bar{D}\} \, (s^2[M] + [K]) - s[M]\{D(0)\} - [M]\{\dot{D}(0)\} = \{\bar{F}\} \tag{5.101}$$

olarak elde edilir. Bu denklem daha basit olarak,

$$[\bar{K}]\{\bar{D}\} = \{\bar{F}\} + \{\bar{F}_0\} \tag{5.102}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[\bar{K}]$ dönüşmüş uzayda dinamik rijitlik matrisi ve $\{\bar{F}_0\}$ başlangıç koşulları nedeniyle yük vektörüne gelen katkı olarak tanımlanır.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

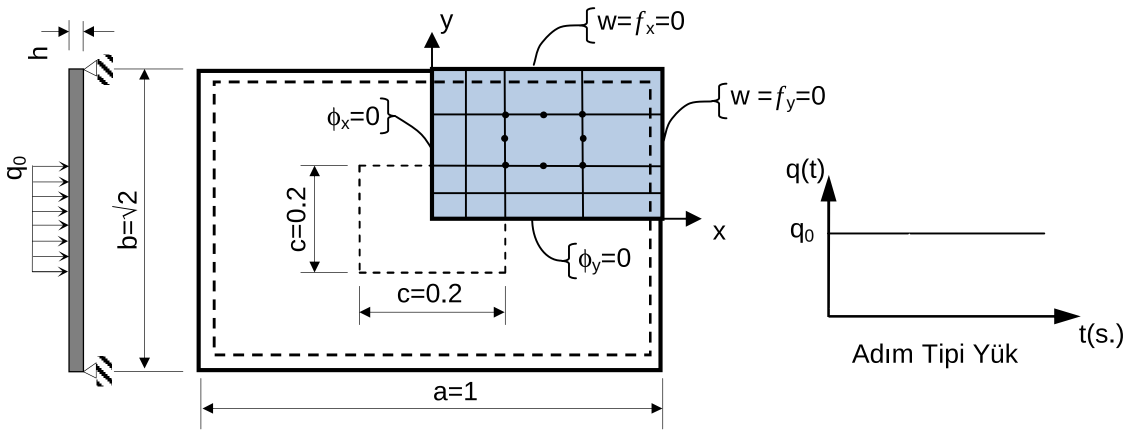
Bu bölümde ortotropik plaklara ve tabakalı kompozit plaklara ait uygulamalar ele alınacaktır. Ortotropik plakların ve tabakalı kompozit plakların dinamik analizlerini yapmak amacıyla Fortran programlama dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Bu programlarda, 8 düğümlü eleman modeli kullanılarak, sonlu elemanlar metodu ile elde edilen hareket denklemine Laplace dönüşüm uygulanarak, dinamik problem statik hale dönüştürülmektedir. Böylece Laplace uzayında elde edilen lineer cebrik denklem takımı Gauss eliminasyon metodu ile çözülerek bir dizi Laplace parametresine bağlı sonuçlar elde edilmektedir. Laplace uzayından zaman uzayına geçiş için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu uygulanmıştır (Durbin, 1974; Narayanan, 1979; Temel, 2003 ; Pekel et al., 2011). Durbin'in Modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu Ek 1'de verilmiştir. Bu çalışmada ele alınan plaklar için simetri şartları dikkate alınmak suretiyle, çeyrek plak için sonlu elaman ağı oluşturularak çözümler elde edilmiştir. Bu bölümde ele alınan örneklerde elde edilen çökme ve moment değerlerinin zamanla değişimleri grafikler üzerinde karşılaştırılmıştır.

6.1. Ortotropik Kalın Plak Uygulamaları

Bu alt bölümde iki örnek problem ele alınacaktır. Öncelikle bu tezde hazırlanan programın doğruluğunu test etmek amacıyla literatürde analitik çözümleri verilen problemlere ait sonuçlar ile karşılaştırma yapılacaktır. Bu örnek aynı zamanda viskoelastik malzeme için de ayrıca çözülecektir. İkinci olarak; düzgün yayılı yük altındaki ortotropik malzemeye sahip ankastre mesnetli dairesel plak ele alınacaktır. Ele alınan plakların çökme ve moment değerleri, sonlu elemanlar metodu ile hem Laplace uzayında ve hem de zaman uzayında farklı zaman artımları için hesaplanacaktır.

6.1.1. Kısmi Yayılı Yük ile Yüklenmiş İzotropik Malzemeye Sahip Dikdörtgen Plak

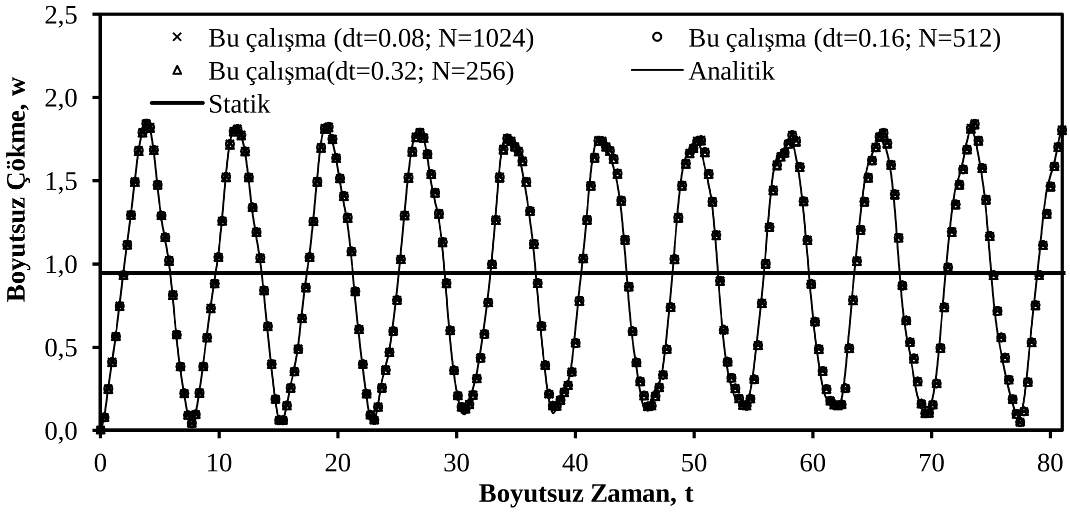
Bu uygulamada, kısmi yayılı dinamik yük altında, izotropik malzemeye sahip dört tarafı basit mesnetlenmiş dikdörtgen plak ele alınacaktır. Ele alınan plak için boyutlar: a=1 m, b=$\sqrt{2}$ m, h=0.2 m.; Poisson oranı, ν=0.3, kütlesel yoğunluk, ρ=1.0 kg/m^3 alınmış olup, plak geometrisi ve sınır şartları Şekil 6.1'de gösterilmiştir. Plak üzerine etkiyen dinamik yük adım tipi bir fonksiyona sahiptir. Bu problem Reismann ve Lee (1969), tarafından analitik olarak çözülmüştür. Bu problemin analitik çözümü Ek 2'de verilmiştir. Bu örnek problemde, simetri şartlarından yararlanmak suretiyle, çeyrek plak için (4x4) sonlu elaman ağı oluşturulmuştur. Bu örnekte çökme, moment ve zaman büyüklükleri sırasıyla Ehb/q_0a^3, $12b/q_0h^2a^2$, $(E/a^2 r)^{1/2}$ terimleri ile çarpılarak boyutsuzlaştırılmaktadır.



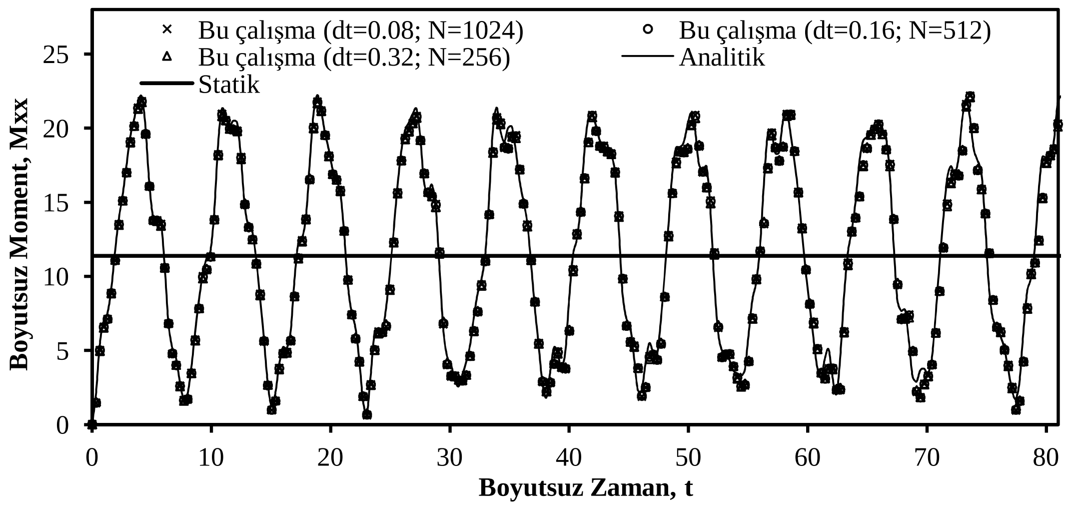
a) Plak geometrisi ve sonlu eleman ağı **b)** Dinamik yük fonksiyonu

Şekil 6.1. Kısmi yayılı yüke maruz dikdörtgen plak

Farklı zaman artım miktarlarına göre Laplace uzayında elde edilen çökme değerleri ile analitik ve statik sonuçlar Şekil 6.2'de gösterilmiştir. Şekil 6.2'nin incelenmesinden, değişik zaman artımları için Laplace uzayında elde edilen çökme değerlerinin analitik değerler ile çakıştığı görülmektedir. Şekil 6.3'te farklı zaman artım miktarları için Laplace uzayında elde edilen çözümler ile analitik ve statik çözümler birlikte gösterilmiştir. Bu çalışmada önerilen metot ile farklı zaman artım miktarları için hesaplanan moment değerleri ile analitik değerlerin çakıştığı görülmektedir (Şekil 6.3). Moment değerleri, plak ortasına en yakın Gauss noktasında (0.0211;0.0211) hesaplanmıştır.

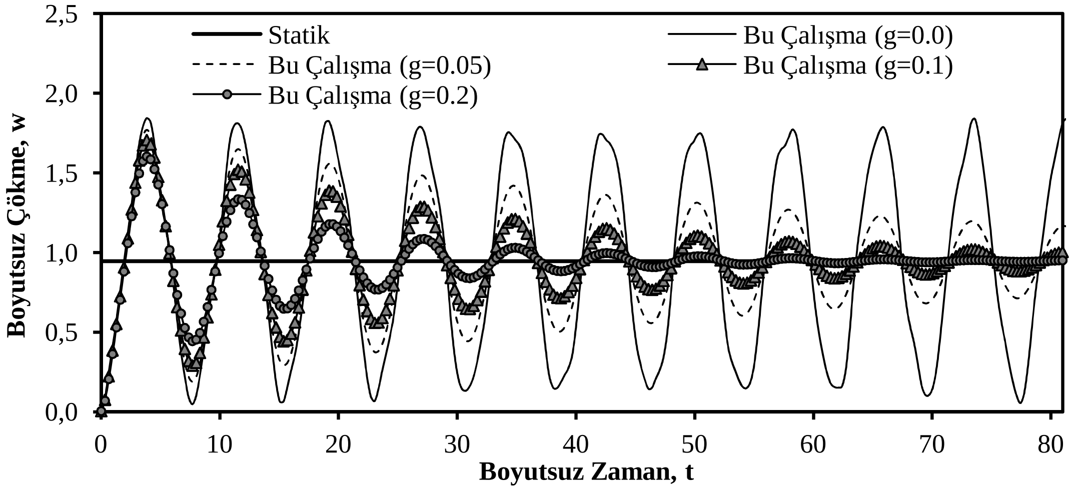


Şekil 6.2. Plak ortasındaki çökmenin zamanla değişimi

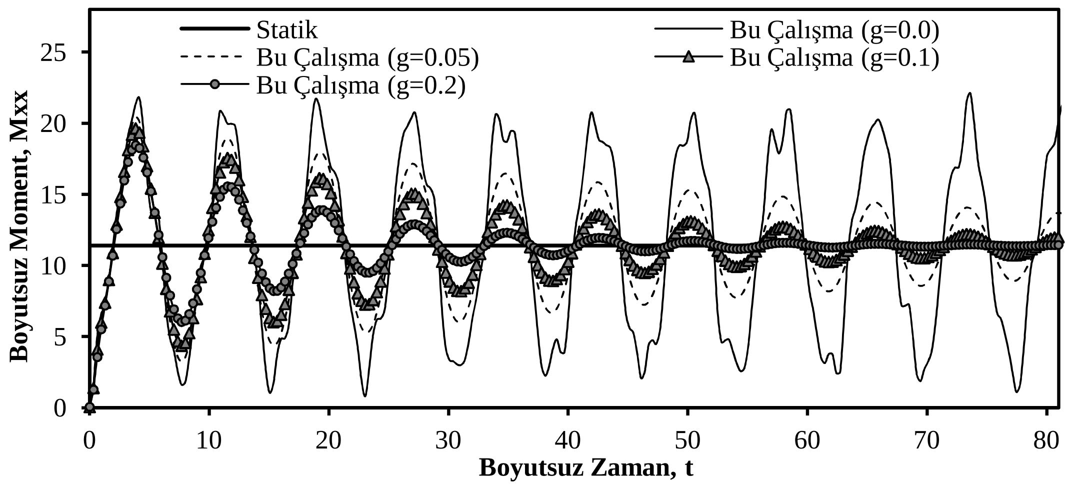


Şekil 6.3. Plağın Gauss noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Çözümler çeşitli zaman artım miktarları ve Laplace parametreleri için test edilmiş; dt=0.08, 0.16, 0.32 zaman artımları ve N=256, 512, 1024 Laplace parametreleri kullanılarak elde edilen tüm çözümlerin analitik çözüm ile çakıştığı görülmüştür.



Şekil 6.4. Plak ortasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 6.5. Plağın Gauss noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

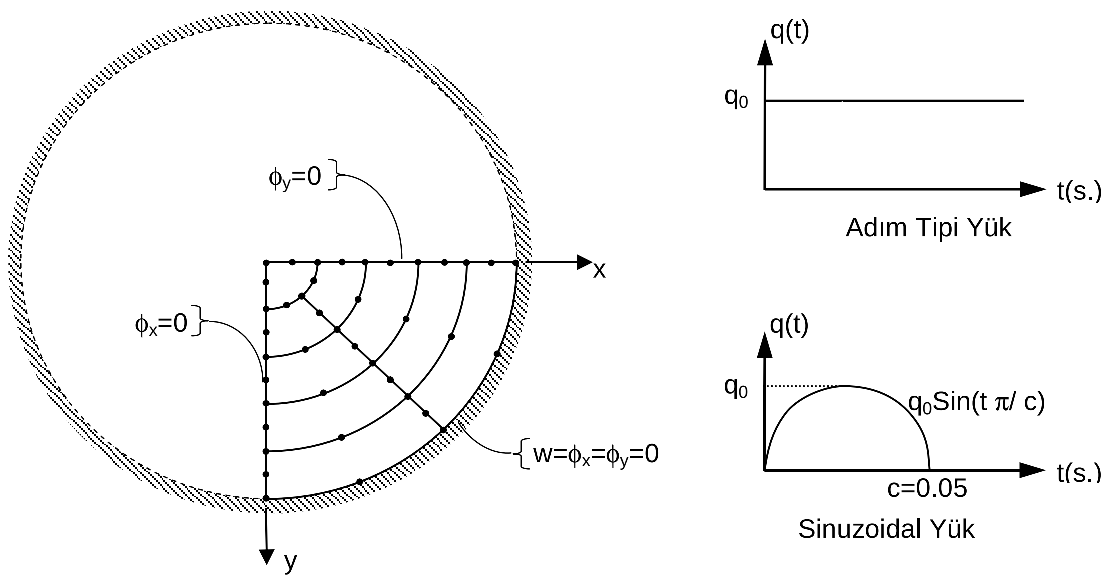
Değişik sönüm oranları dikkate alınarak plak ortasında elde edilen çökme ve eğilme momenti M_{xx} değerleri sırasıyla Şekil 6.4 ve Şekil 6.5'te gösterilmiştir. Bu şekillerde değişik sönüm oranlarına göre elde edilen viskoelastik çözümler ile birlikte statik, lineer elastik çözümler de gösterilmiştir. Beklendiği gibi, elastik-dinamik çözümler, statik değerler etrafında salınıma devam ederken, viskoelastik durumda davranışlar zamanla statik değerlere yaklaşarak sönümlenmektedir. Sönüm oranının artması durumunda salınıma ait genliklerin statik değere daha çabuk yaklaştığı anlaşılmaktadır. Ayrıca, viskoelastik kalın plakların dinamik davranışlarının belli bir süre sonra sönümlendiği ve statik değere ulaştığı ortaya çıkmaktadır.

6.1.2. Ortotropik Malzemeye Sahip Dairesel Plak

Bu uygulamada uniform yayılı dinamik yük ile yüklenmiş, kenarlarından ankastre mesnetlenmiş, ortotropik malzemeye sahip dairesel plak ele alınmıştır. Plak geometrisi, sonlu eleman ağı, sınır şartları ve dinamik yük tipleri Şekil 6.6'da gösterilmiştir. Plak çapı, D=1 m., kalınlık, h=0.2 m. alınmıştır. Dairesel plak q_0=1000 N/m^2 şiddetinde iki farklı tipte dinamik yük için çözülecektir. Plağa ait kütlesel yoğunluk ρ=2000 kg/m^3 olup, bu uygulamada hem izotropik malzeme, hem de ortotropik malzeme durumları için çözümler yapılacaktır. Malzeme özellikleri aşağıda verilmektedir:

Ortotropik malzeme : $E_1=25\times10^9$ N/m^2, $E_2=E_1/25$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.2E_2$, $\nu=0.25$

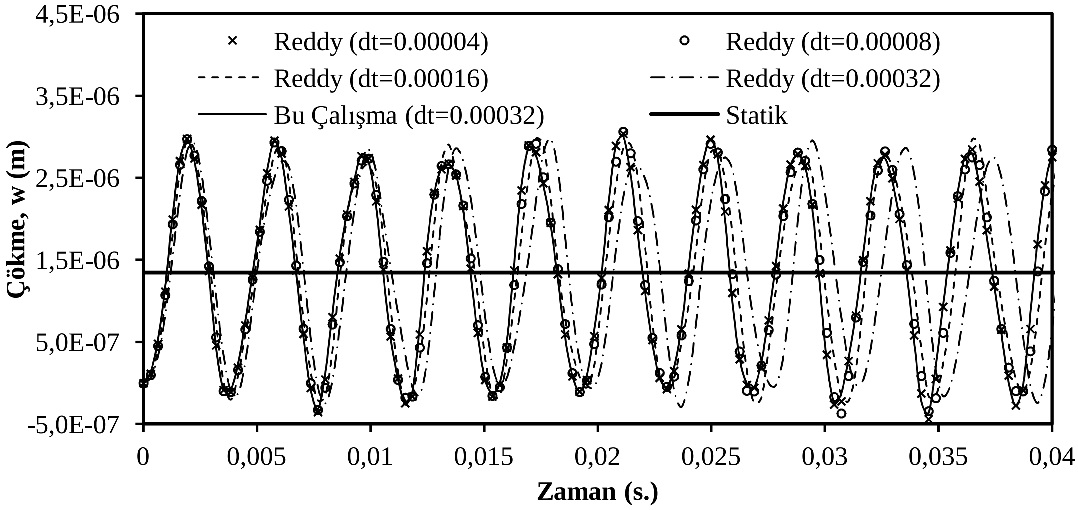
İzotropik malzeme : $E=25\times10^9$ N/m^2, $G=10\times10^9$ N/m^2, $\nu=0.25$



a) Plak geometrisi ve sonlu eleman ağı **b)** Dinamik yük fonksiyonu

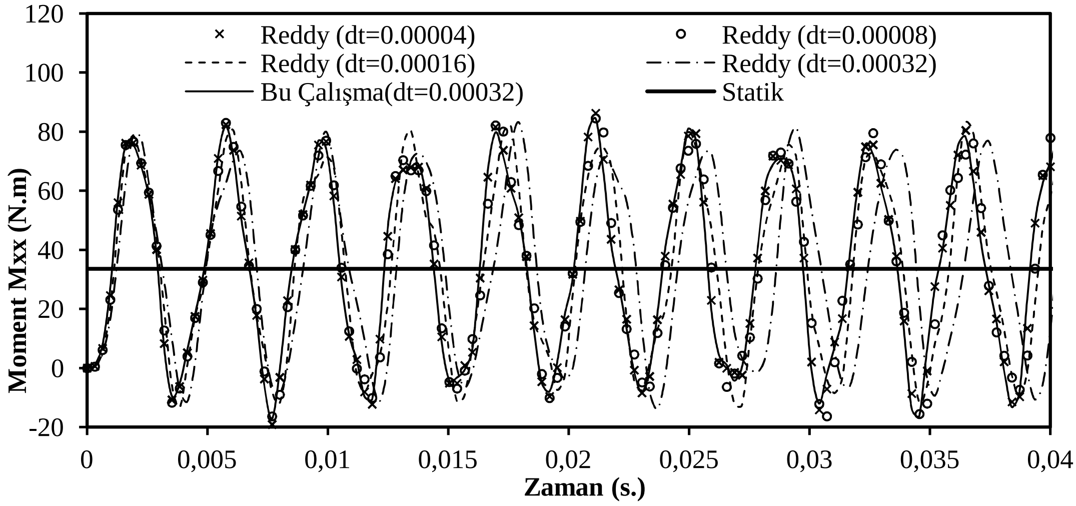
Şekil 6.6. Uniform yayılı yüklü dairesel plak

Ele alınan dairesel plağa ait çözümler, simetri şartları dikkate alınmak suretiyle, çeyrek plak için 9 adet elemanla sonlu eleman ağı oluşturularak elde edilmiştir. Dairsel plak öncelikle adım tipi yük altında lineer-elastik ve viskoelastik durum için ayrı ayrı analize tabi tutulmuş, ardından sinüzoidal yükleme etkisinde viskoelastik durum için analizler yapılmıştır. Bu örnekte SEM ve Newmark metodu ile çözümler elde etmek için Reddy (2006), tarafından hazırlanan SEM2D programı kullanılmıştır. Plak ortasındaki çökme ve eğilme momenti değerleri; hem SEM ile Laplace uzayında hem de SEM ve Newmark metodunun birlikte kullanılması ile zaman uzayında elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Eğilme momenti değerleri plak ortasına en yakın Gauss noktasında (0.02123; 0.02123) hesaplanmıştır. Öncelikle adım tipi yükleme dikkate alınacaktır. SEM ve Newmark metodunun birlikte kullanılması ile adım tipi yükleme etkisindeki ortotropik plakta oluşan çökme değerlerinin zamanla değişimi Şekil 6.7'de, M_{xx} eğilme momenti değerlerinin zamanla değişimi ise Şekil 6.8'de gösterilmektedir.



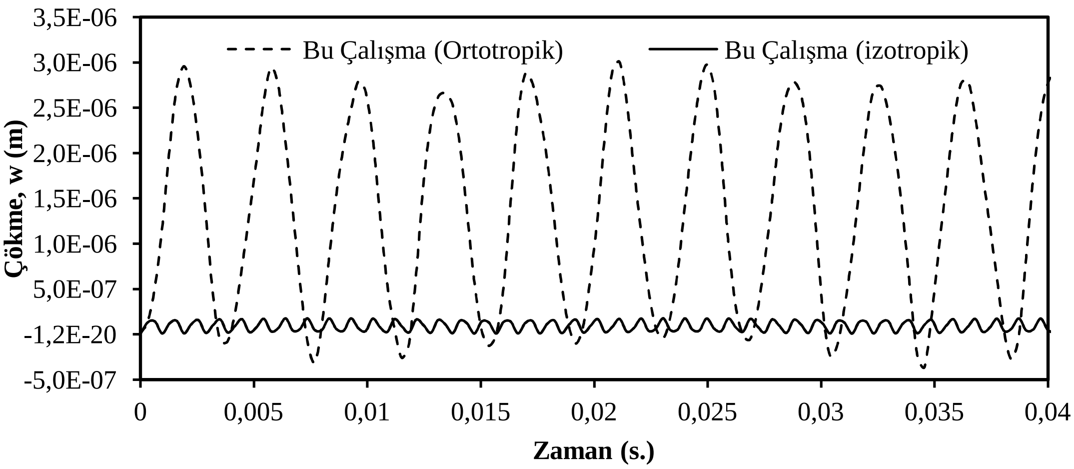
Şekil 6.7. Plak orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi

Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'in incelenmesinden, Laplace uzayında çok kaba zaman artımı (0.00032 s.) kullanılarak elde edilen değerler ile, zaman uzayında çok sık zaman artımı (0.00004 s.) kullanılarak elde edilen değerlerin birbiri ile örtüştüğü görülmüştür. Genel olarak bu tezde önerilen metod ile elde edilen sonuçlar, zaman uzayında Newmark metodu ile elde edilen sonuçlara göre daha tutarlı olduğu görülmektedir. Bu çalışmada önerilen metot ile yapılacak analizlerde, hesaplama süresi bakımından önemli bir kazanç sağlanmaktadır. Bu örnek için kullanılan hesaplama süresi SEM-Newmark yöntemine göre 3.5 katı hızlı gerçekleşmektedir.

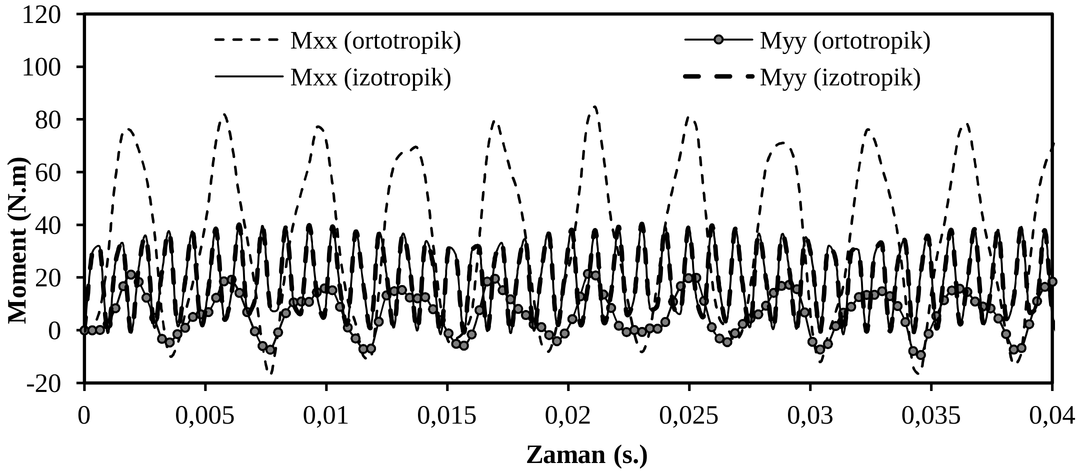


Şekil 6.8. Plağın Gauss noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Şekil 6.9'da ortotropik ve izotropik malzeme durumlarında plak ortasında elde edilen çökme değerleri gösterilmiştir. Şekilden görülmektedir ki; her iki malzeme durumu için elde edilen deplasmanlar arasında büyük farklar bulunmaktadır. Şekil 6.10'da ise, hem ortotropik hem de izotropik malzeme durumları için plak ortasında elde edilen M_{xx}, M_{yy} momentleri karşılaştırılmıştır.



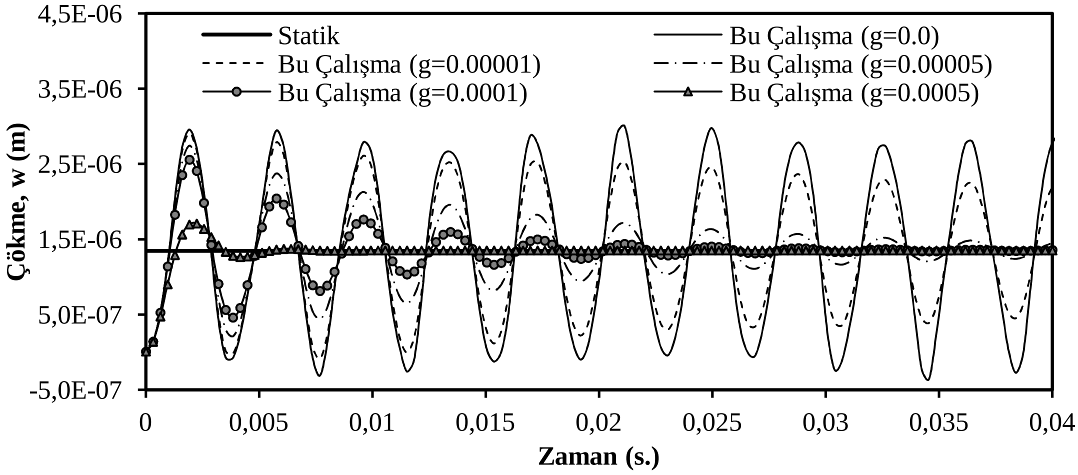
Şekil 6.9. Plak orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



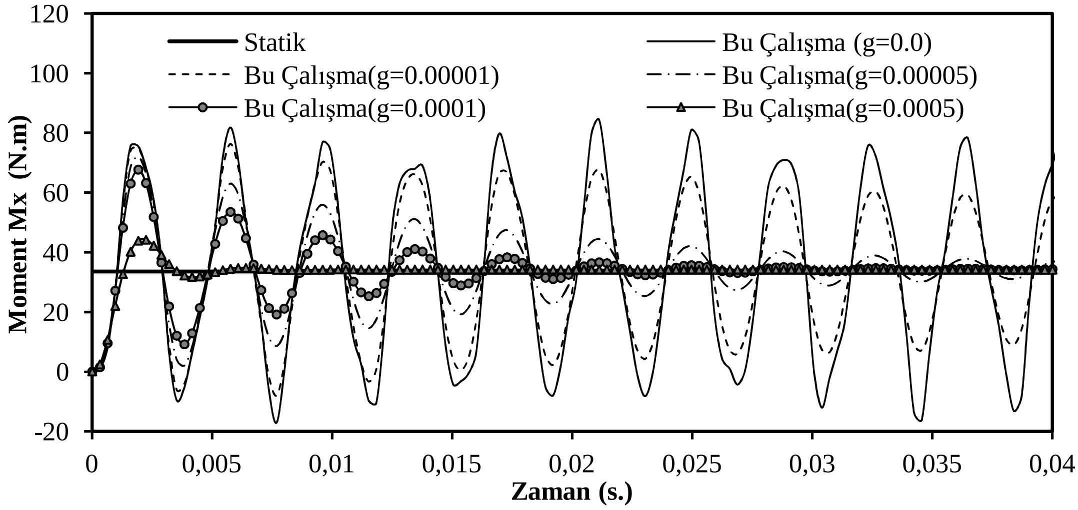
Şekil 6.10. Plağın Gauss noktasındaki M_{xx} ve M_{yy} momentlerinin zamanla değişimi

İzotropik malzeme durumunda M_{xx} ve M_{yy} momentlerinin aynı olmasına karşın, ortotropik malzeme durumunda bu momentler birbirinden oldukça farklı çıkmıştır.

Viskoelastik malzeme durumları için plak ortasında elde edilen çökme değerleri Şekil 6.11'de, moment değerleri ise Şekil 6.12'de gösterilmiştir. Bu şekiller statik, lineer-elastik ve değişik sönüm oranları için viskoelastik durumları içermektedir. Önceki örnekte elde edilen sonuçlara benzer şekilde, ortotropik malzemeye sahip viskoelastik plakların dinamik davranışında genlikler zamanla azalarak statik değere ulaşmaktadır. Sönüm oranı büyüdükçe statik değerlere yakınsama da daha kısa sürede gerçekleşmektedir.

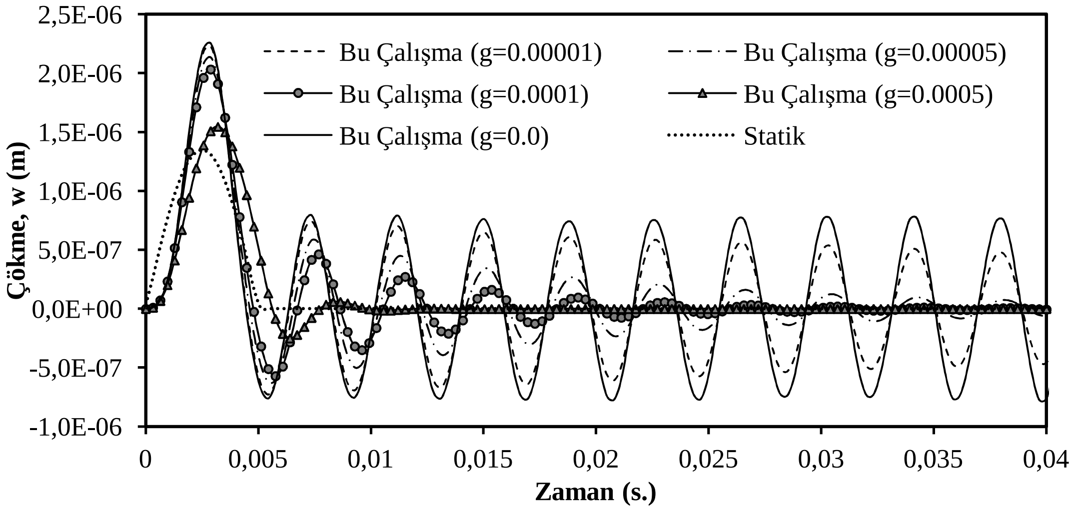


Şekil 6.11. Plak orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi

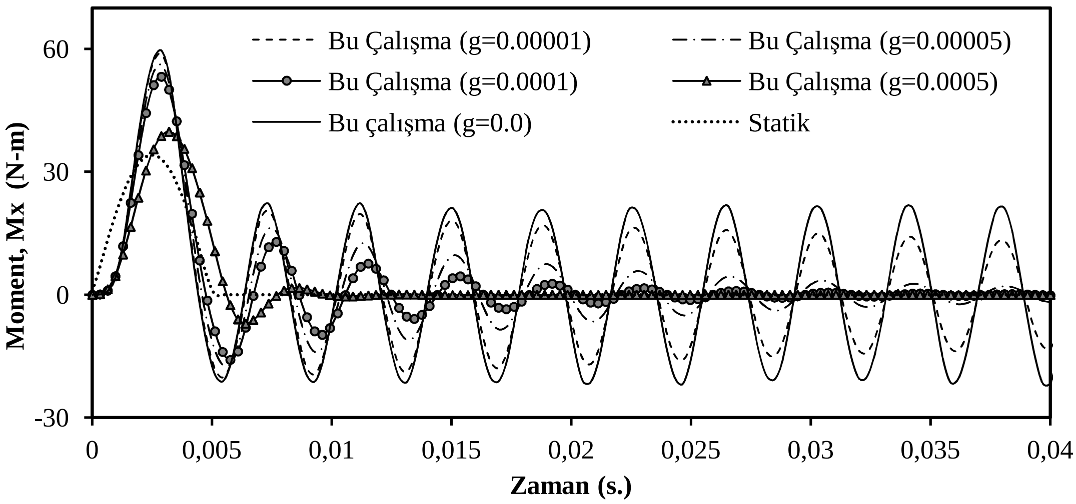


Şekil 6.12. Plağın Gauss noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

İkinci olarak, sinüzoidal yüklemenin etkisi incelenecektir. Viskoelastik malzeme durumunda plak ortasındaki çökme değerleri Şekil 6.13'de, moment değerleri ise Şekil 6.14'de gösterilmiştir. Adım tipi yüklemeye benzer şekilde, çökme ve momentlere ait genlikler zamanla azalarak statik değerlere ulaşmakta ve sönüm oranı büyüdükçe statik değere yakınsama da daha kısa sürede gerçekleşmektedir.



Şekil 6.13. Plak orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 6.14. Plağın Gauss noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

6.2. Tabakalı Kompozit Plak Uygulamaları

Bu alt bölümde tabakalı kompozit kalın plakların viskoelastik dinamik davranışları incelenecektir. Bu amaçla, zamanla keyfi olarak değişen yükler altındaki ortotropik malzemeye sahip tabakalı kalın plakların, birinci mertebe kayma deformasyon teorisini kullanarak, Laplace uzayında viskoelastik dinamik analizlerini SEM ile yapan Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu programda sonlu elemanlar metodu ile elde edilen sistemi idare eden hareket denklemine Laplace dönüşümü uygulanmaktadır. Böylece dönüşmüş uzayda elde edilen lineer cebrik denklem takımı Gauss eliminasyon metodu ile çözülerek Laplace parametresine bağlı sonuçlar elde edilmektedir. Laplace uzayından zaman uzayına geçiş için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu uygulanmaktadır. Hazırlanan programın doğruluğu literatürde yarı-analitik çözümleri bulunan örnekler üzerinde gösterilecektir (Reddy, 2003). İlgili referansta anti-simetrik dik açılı ve eğik açılı tabakalı plakların BKDT'ne göre Navier çözümleri için hareket denklemleri elde edilmiş; bu denklemlerin adım adım integrasyonları ise Newmark metodu yardımı ile yapılmıştır (Ek 3'e bakınız).

Çalışmalarda yeterli sıklıkta sonlu eleman ağının oluşturulması amacıyla (0/90), $(0/90)_4$, (45/-45), $(45/-45)_4$, (0/90/90/0), (0/90/0) tabaka dizilimine sahip plakların çeşitli a/h oranları ve farklı sonlu eleman ağları kullanılarak çeyrek plak üzerinde statik analizler yapılmıştır. Bu tezde elde edilen sonuçlar, analitik sonuçlarla Çizelge 6.1'de karşılaştırılmıştır. Ele alınan örneklerde malzeme özellikleri: $E_1=25x10^9$ N/m^2, $E_2=E_1/25$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.2E_2$, $\nu=0.25$; geometri özellikleri: a=b=1 m, h=0.1 m, a/h=10 seçilmiştir. Plak üzerine ise $q_0=1000$ N/m^2 şiddetinde yük etkimektedir. Elde edilen çökme değerleri $100h^3E_2/qa^4$ ile çarpılarak boyutsuzlaştırılmıştır.

Çizelge 6.1. Çeşitli tabakalanma, oran ve sonlu eleman ağları için elde edilen boyutsuz çökme değerleri

Tabakalanma	**Oran (a/h)**	**Bu Çalışma**		**Analitik**
		(2X2)	**(4X4)**	
(0/90/0)	100	0.6707	0.6697	0.6697
	20	0.7568	0.7572	0.7572
	10	1.0211	1.0219	1.0219
(0/90/90/0)	100	0.6822	0.6833	0.6833
	20	0.7688	0.7693	0.7694
	10	1.0241	1.0250	1.0250
(45/-45)	100	1.0282	1.0305	1.0305
	20	1.0896	1.0907	1.0907
	10	1.2778	1.2791	1.2792
$(45/-45)_4$*	100	0.3878	0.3882	0.3883
	20	0.4478	0.4482	0.4483
	10	0.6358	0.6366	0.6366
(0/90)	100	1.6892	1.6978	1.6980
	20	1.7563	1.7582	1.7582
	10	1.9449	1.9468	1.9468
$(0/90)_4$*	100	0.7155	0.7175	0.7175
	20	0.7769	0.7776	0.7776
	10	0.9651	0.9660	0.9660

* 4 alt indisi ile gösterilen plaklar 8 tabakalı dizilime sahiptir.

Çizelge 6.1'in incelenmesinden, statik analiz sonucunda; çeyrek plakta (4x4) sonlu eleman ağı için elde edilen sonuçların analitik sonuçlar ile çakıştığı görülmüştür. Dolayısıyla dinamik analizlerde (4x4) sonlu eleman ağı seçilecektir.

6.2.1. Kenarlarından Basit Mesnetlenmiş Antisimetrik Tabakalanmaya Sahip Kompozit Plak

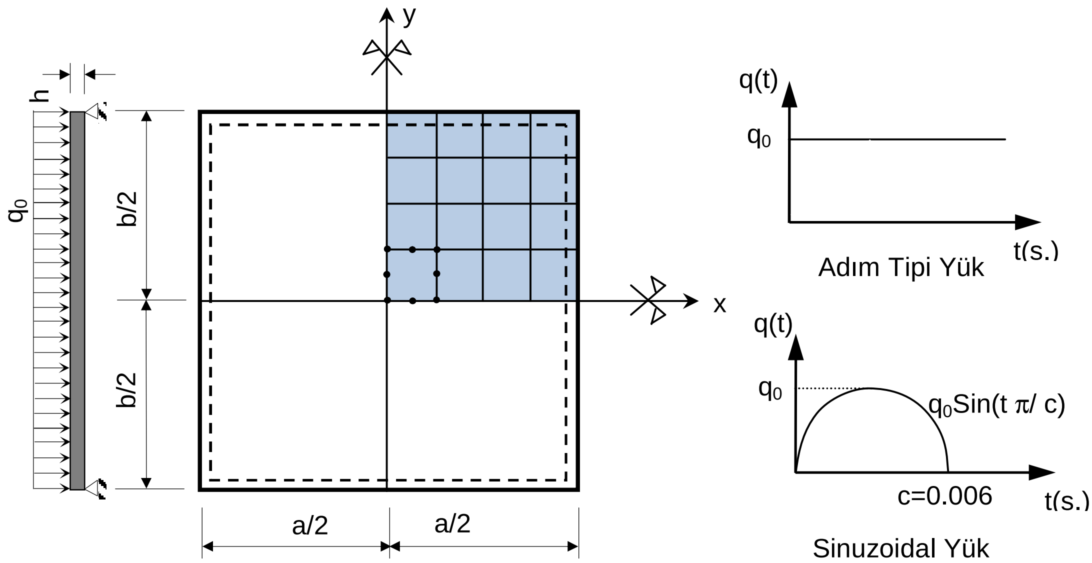
Bu uygulamada, kenarlarından basit mesnetlenmiş tabakalı kompozit plak üzerinde düzgün yayılı dinamik yük etki etmektedir. Ele alınan tabakalı plak için sonlu eleman ağı ve dinamik yükleme ve tabaka dizilimleri Şekil 6.15'te gösterilmiş olup, plağa ait bilgiler aşağıda verilmiştir:

Malzeme özellikleri: E_1=25x10^9 N/m^2, E_2=E_1/25, G_{12}=G_{13}=0.5E_2, G_{23}=0.2E_2, ν=0.25

Geometrik özellikler: a=b=1 m, h=0.1 m (a/b=1, a/h=10).

Kütlesel yoğunluk : ρ=2000 kg/m^3

Dinamik yük şiddeti: q_0=1000 N/m^2.



a) Plak geometrisi ve sonlu eleman ağı **b)** Dinamik yük fonksiyonları

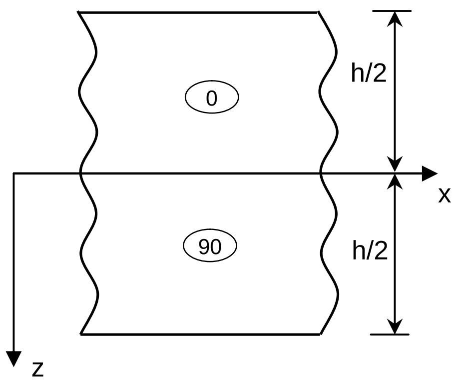
Şekil 6.15. Uniform yayılı yüklü tabakalı plak

Basit mesnetli, tabakalı çeyrek plak için simetri ve sınır şartları Çizelge 6.2'de verilmiştir.

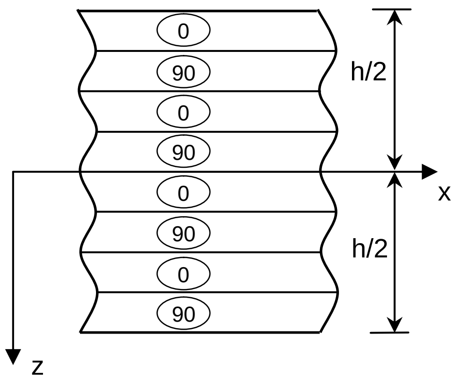
Çizelge 6.2. Basit mesnetli çeyrek plak için simetri ve sınır şartları

Sınır Şartları	x=**0**	x=a/**2**	y=**0**	y=b/**2**
SS-1	u_0=0, ϕ_x=0	v_0=0, w_0=0, ϕ_y=0	v_0=0, ϕ_y=0	u_0=0, w_0=0, ϕ_x=0
SS-2	v_0=0, ϕ_x=0	u_0=0, w_0=0, ϕ_y=0	u_0=0, ϕ_y=0	v_0=0, w_0=0, ϕ_x=0

Durum 1) Anti-Simetrik Dik Açılı Tabakalanma Durumu



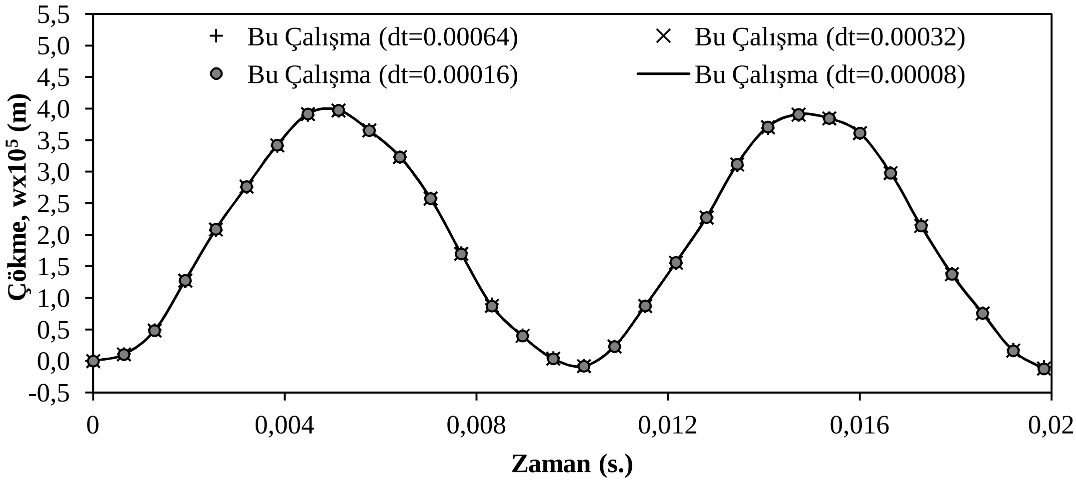
a) (0/90) dizilime sahip plak kesiti



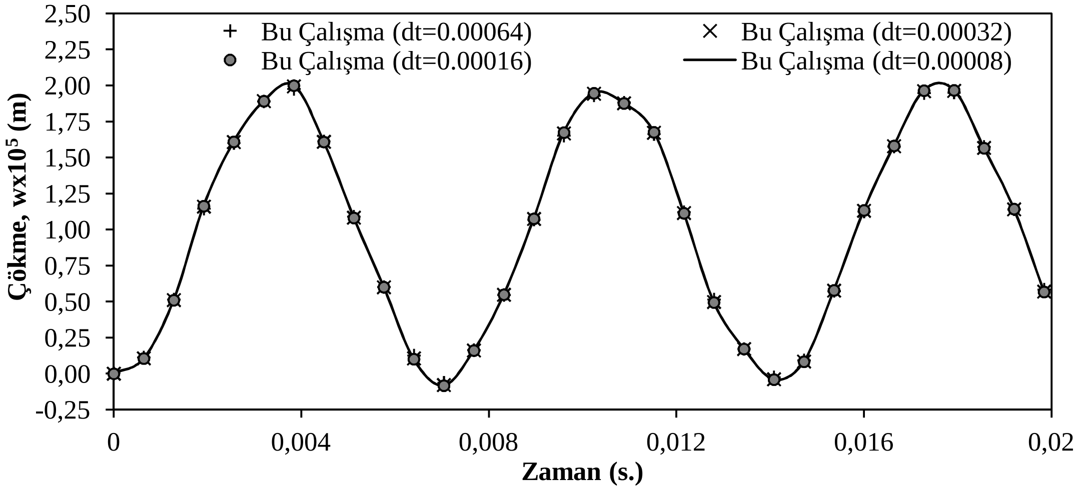
b) $(0/90)_4$ dizilime sahip plak kesiti

Bu uygulamada kenarlarından basit mesnetlenmiş tabakalı plak 2 ve 8 tabaka dizilimi için çözülmüştür. (0/90) ve $(0/90)_4$ şeklinde dik açılı tabaka dizilimlerine sahip plak kesitleri yukarıda verilmiştir. Simetri ve sınır şartları (SS-1) Çizelge 6.2'de verilmiştir. Bu çalışmada önerilen metot ile a/h=10 oranına sahip tabakalı plak için elde edilen çözümler, Reddy (2003)'te verilen yarı-analitik metod kullanılarak elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Tabakalı plağın orta noktasındaki çökme ve eğilme momenti değerleri grafikler üzerinde gösterilmiştir.

Öncelikle bu tezde önerilen metodun doğruluğunu ve farklı zaman artım miktarları için elde edilen sonuçların tutarlılığını test etmek amacıyla çeşitli analizler yapılmıştır. Tabakalı plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimleri (0/90) tabaka dizilimi için Şekil 6.16'da, $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için ise Şekil 6.17'de gösterilmiştir.



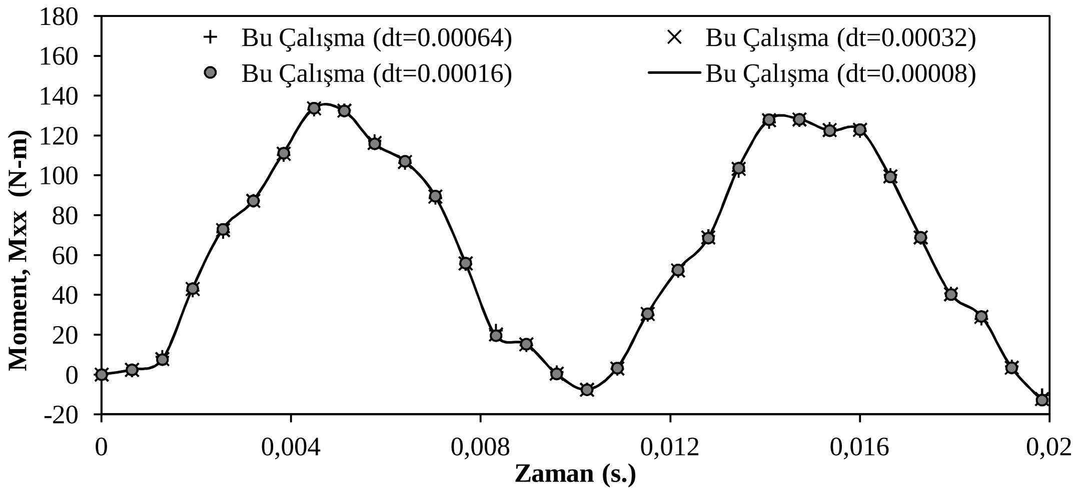
Şekil 6.16. (0/90) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



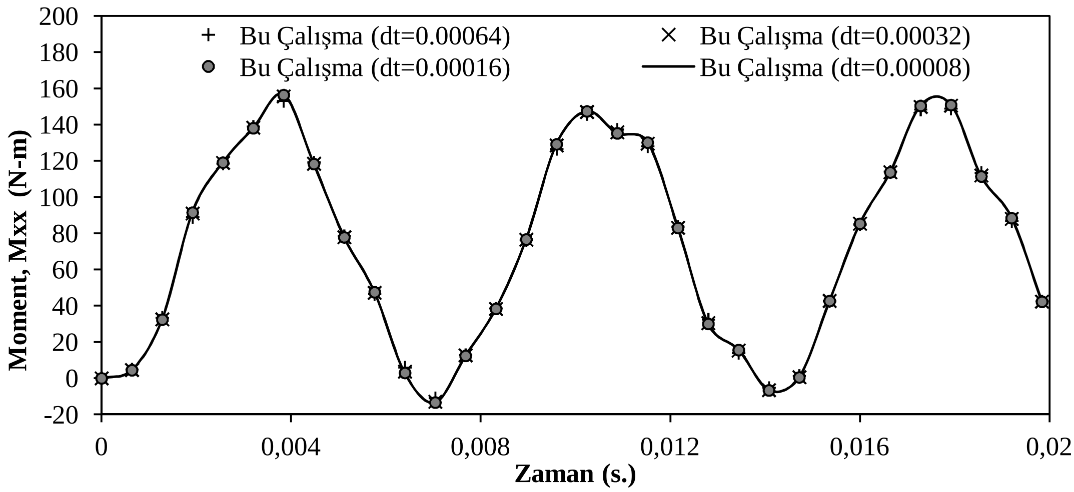
Şekil 6.17. $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi

Tabakalı plak için bu tezde önerilen metot ile farklı zaman artım miktarları için elde edilen çözümlerin birbiri ile çakıştığı görülmektedir. Şekil 6.16 ve 6.17'nin incelenmesinden $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için plak genlik ve periyotların (0/90) tabaka dizilimi için bulunan genlik ve periyotlardan daha küçük olduğu görülmektedir.

Tabakalı plağın orta noktasındaki momentin zamanla değişimi, (0/90) tabaka dizilimi için Şekil 6.18'de, $(0/90)_4$ dizilimi için ise Şekil 6.19'da gösterilmiştir.



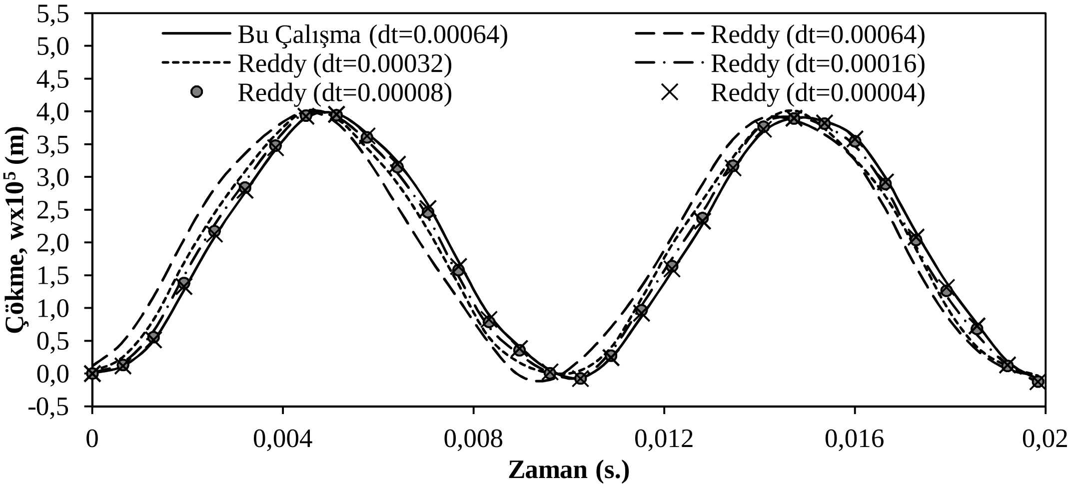
Şekil 6.18. (0/90) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi



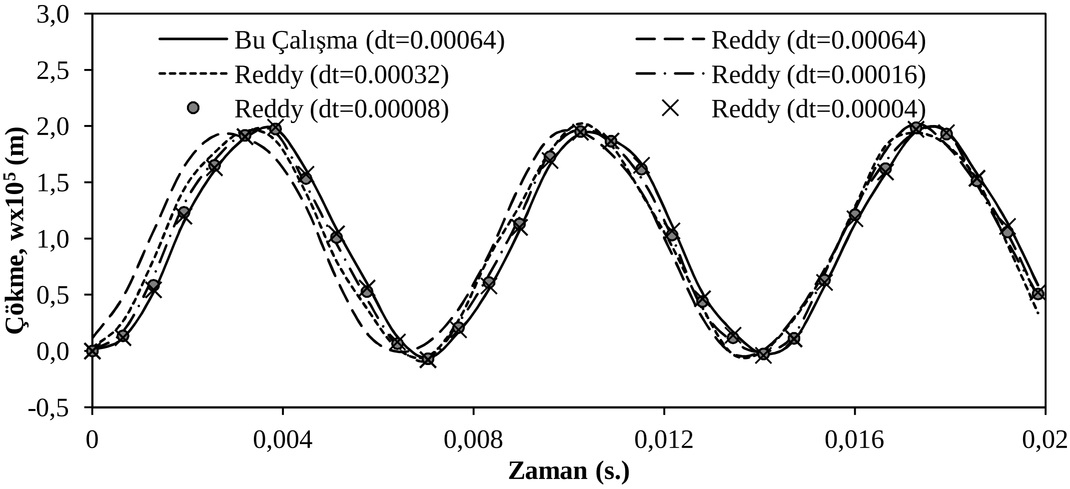
Şekil 6.19. $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Momentlere ait sayısal değerler incelendiğinde, çökmeye benzer şekilde farklı zaman artım miktarları için elde edilen çözümlerin hepsinin çakıştığı görülmektedir. Şekil 6.18 ve 6.19'un incelenmesinden, $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için plak genliklerinin (0/90) tabaka diziliminkinden daha büyük olduğu, periyotların ise daha küçük olduğu görülmektedir. Tabaka sayısı arttıkça moment salınımının genlikleri artarken periyotları ise küçülmektedir.

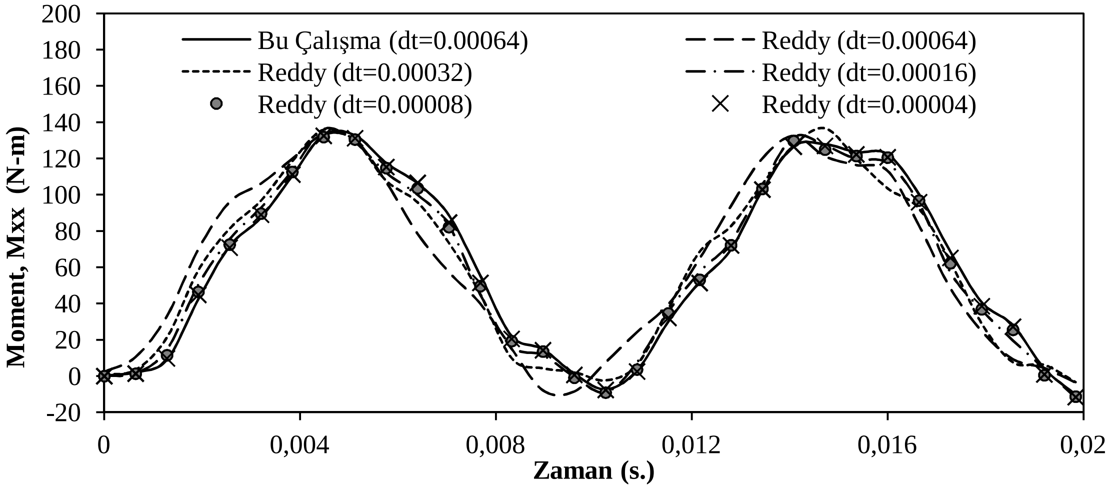
Bu çalışmada önerilen metod ve yarı-analitik metod kullanılarak farklı zaman artımları için elde edilen çözümleri Şekil 6.20-6.23'te karşılaştırılmıştır. Yarı-analitik çözüm yönteminde, sistemi idare eden hareket denklemi, Navier metodu ile analitik olarak elde edilmekte ve bu denklem takımının çözümü ise Newmark metodu ile yapılmaktadır. Yarı-analitik metod ile elde edilen çökme değerlerinin zamanla değişimi Şekil 6.20-6.21'de, moment değerlerinin zamanla değişimi ise Şekil 6.22-6.23'te gösterilmiştir.



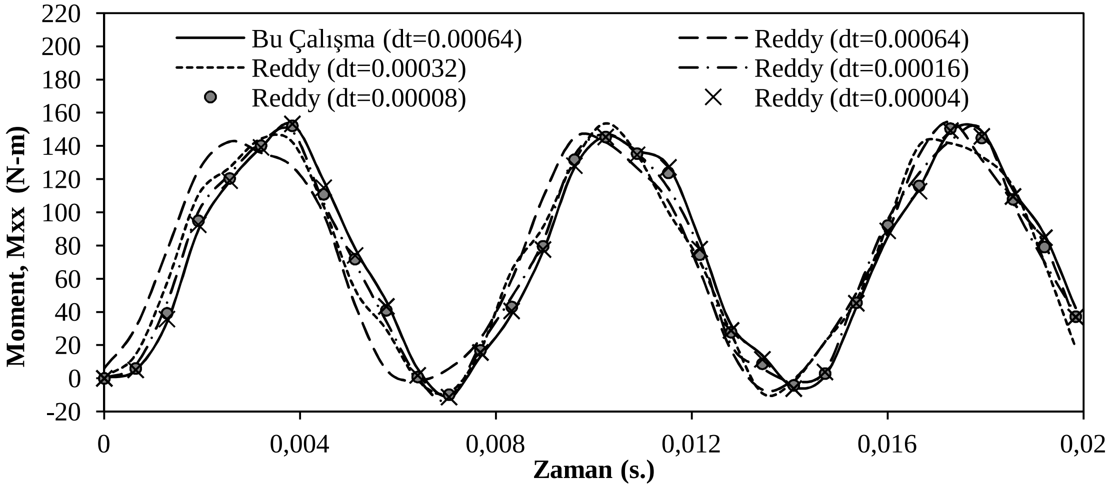
Şekil 6.20. (0/90) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 6.21. $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



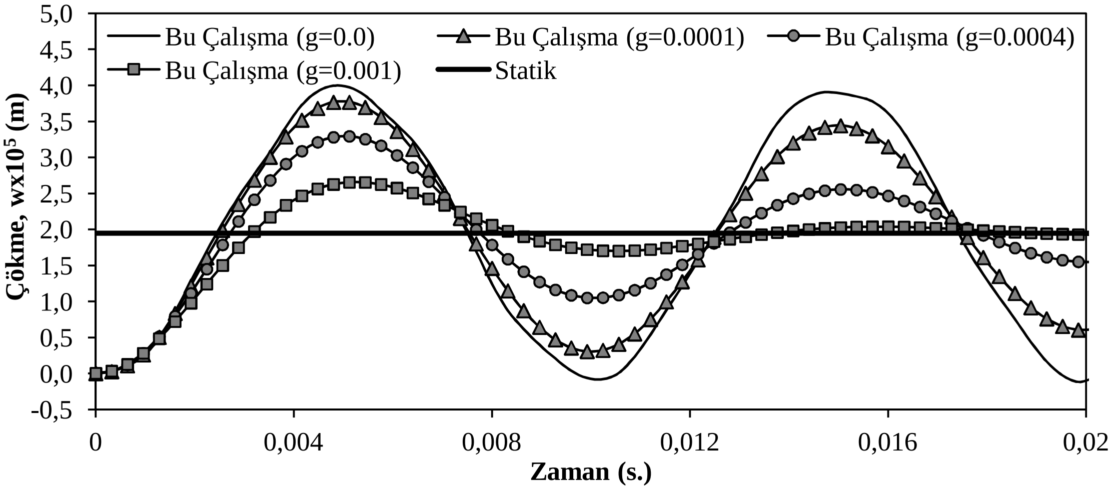
Şekil 6.22. (0/90) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi



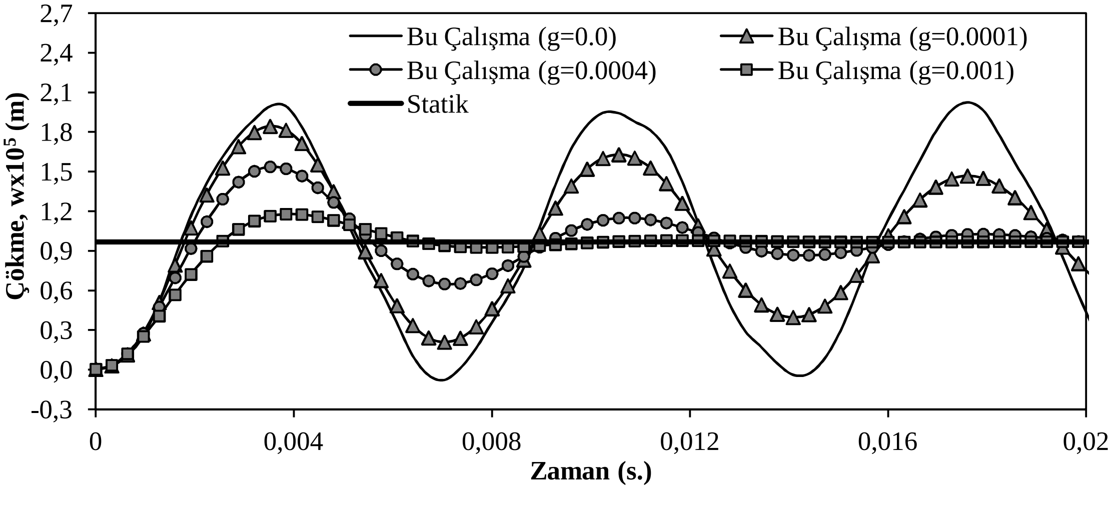
Şekil 6.23. $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Şekillerin incelenmesinden yarı-analitik yöntem sonuçlarının 0.00004 ve daha küçük zaman artım miktarları için tutarlı sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır. Şekillerden görüleceği üzere, Laplace uzayında çok kaba zaman artımı (0.00064 s.) kullanılarak elde edilen değerler ile, zaman uzayında yarı-analitik yöntemle çok daha sık zaman artımı (0.00004 s.) kullanılarak elde edilen değerlerin ancak birbiri ile örtüştüğü görülmektedir. Genel olarak bu tezde önerilen yöntem ile elde edilen sonuçlar yarı-analitik yöntemle elde edilen sonuçlara göre daha tutarlı ve gerçekçidir.

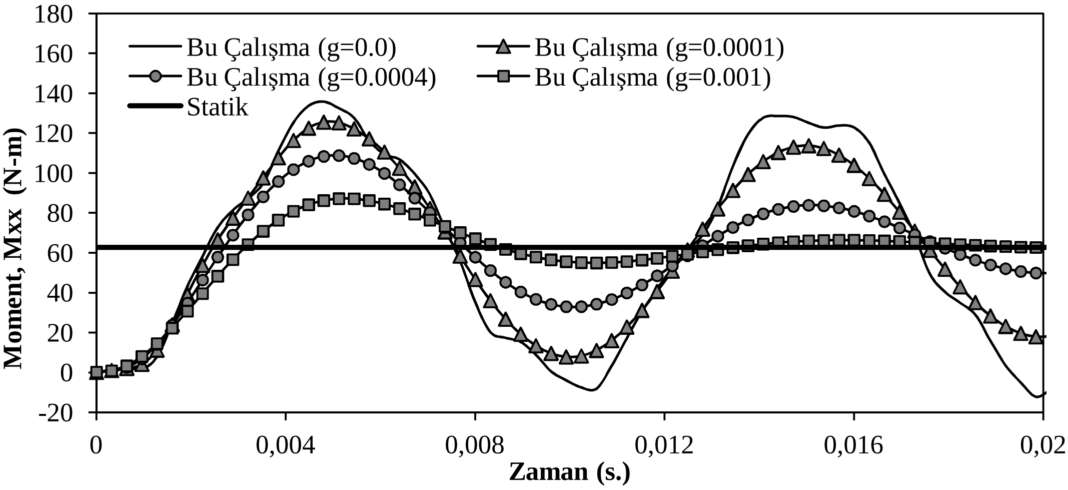
Tabakalı plakların viskoelastik davranışını incelemek amacıyla (0/90) ve $(0/90)_4$ tabaka dizilimleri için plakların viskoelastik dinamik analizleri yapılmış; elde edilen çökme ve moment değerlerinin zamanla değişimleri Şekil 6.24-6.27'de gösterilmiştir.



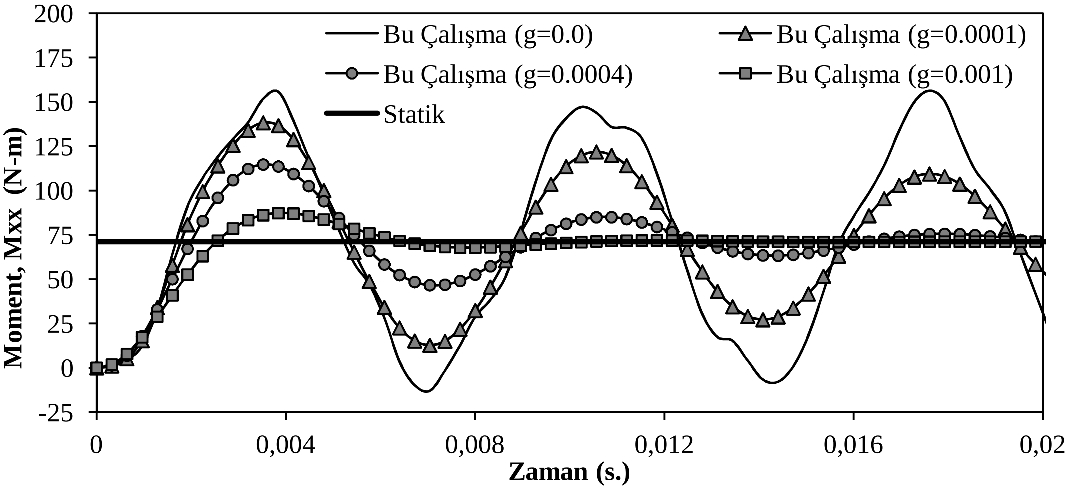
Şekil 6.24. (0/90) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 6.25. $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



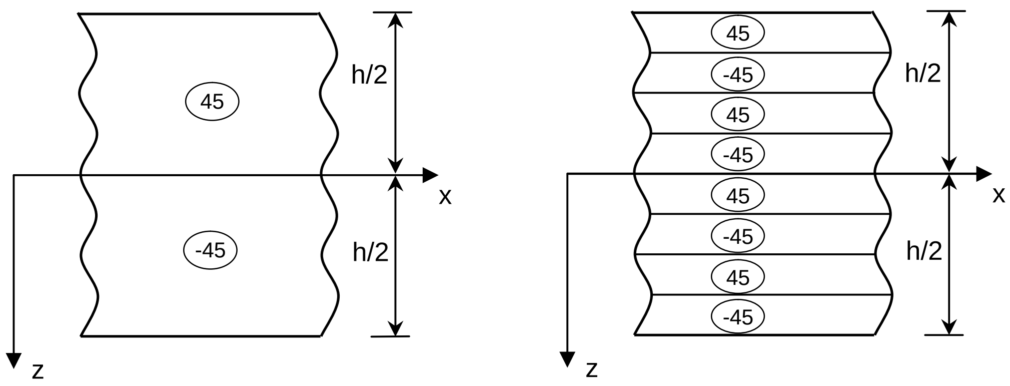
Şekil 6.26. (0/90) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi



Şekil 6.27. $(0/90)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Şekil 6.24-6.27'de statik çözüm, elastik-dinamik ve farklı sönüm durumları için viskoelastik çözümler de gösterilmiştir. Beklendiği gibi, elastik-dinamik davranışa ait çökme ve momentler statik değerler etrafında salınıma devam ederken; viskoelastik durumda ise, bu değerlere ait salınım zamanla statik değere yaklaşarak sönümlenmektedir. Şekillerden anlaşılacağı gibi, sönüm oranının arttırılması durumunda salınıma ait genlikler statik değere daha çabuk yaklaşacaktır. Ayrıca, viskoelastik malzemeye sahip tabakalı kalın plakların dinamik davranışları belirli bir süre sonra sönümlenerek statik değere ulaşacaktır.

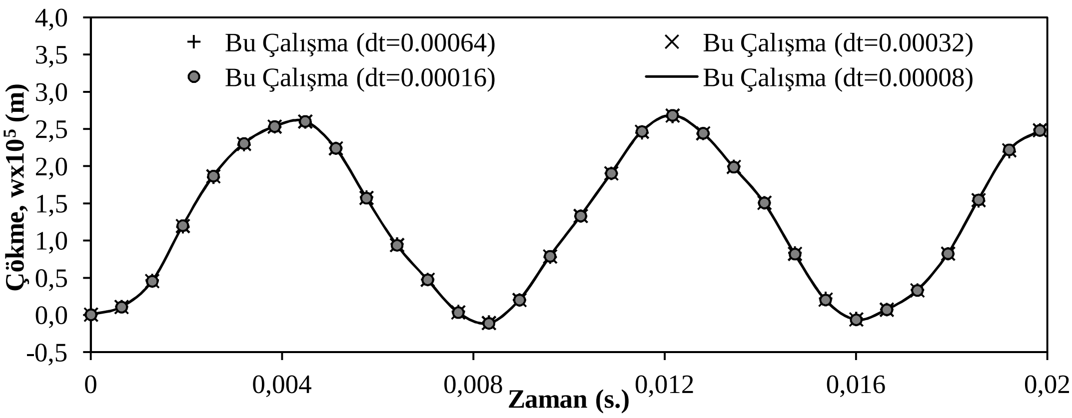
Durum 2) Anti-Simetrik Eğik Açılı Tabakalanma Durumu



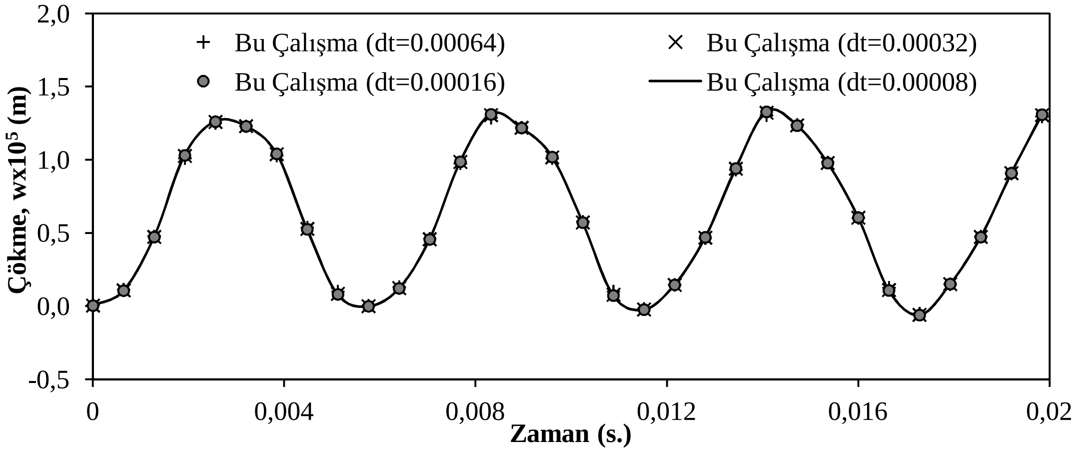
a) (45/-45) dizilime sahip plak kesiti **b)** $(45/-45)_4$ dizilime sahip plak kesiti

Bu uygulamada kenarlarından basit mesnetlenmiş tabakalı plak 2 ve 8 tabaka dizilimi için çözülmüştür. (45/-45) ve $(45/-45)_4$ şeklinde açılı tabaka dizilimlerine sahip plak kesitleri yukarıda verilmiştir. Simetri ve sınır şartları (SS-2) Çizelge 6.2'de verilmiştir. Bu çalışmada önerilen metod ile a/h=10 oranına sahip tabakalı plak için elde edilen çözümler, Reddy (2003)'te verilen yarı-analitik metod kullanılarak elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Tabakalı plağın orta noktasındaki çökme ve eğilme momenti değerleri grafikler üzerinde gösterilmiştir.

Öncelikle, tabakalı plak, adım tipi yük etkisinde çözülecektir. Tabakalı plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimleri (45/-45) tabaka dizilimi için Şekil 6.28'de, $(45/-45)_4$ tabaka dizilim için ise Şekil 6.29'de gösterilmiştir.



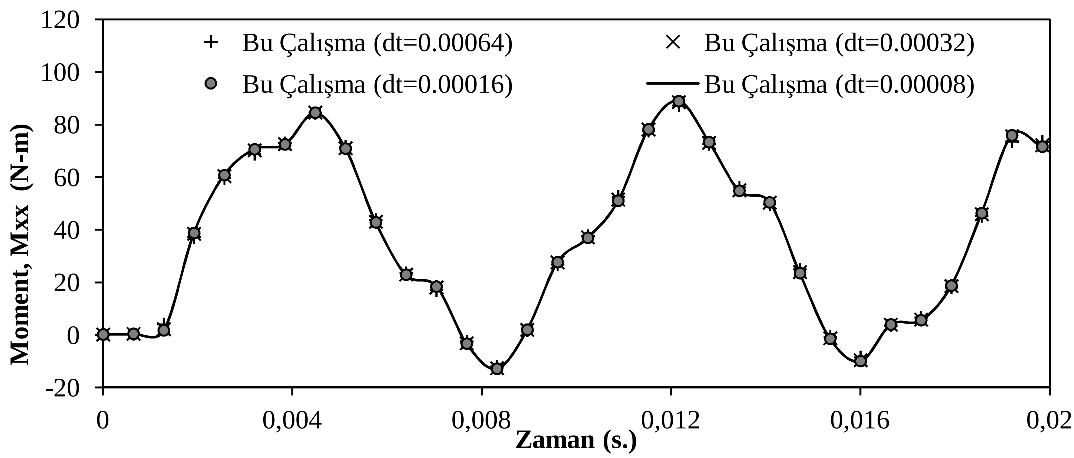
Şekil 6.28. (45/-45) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



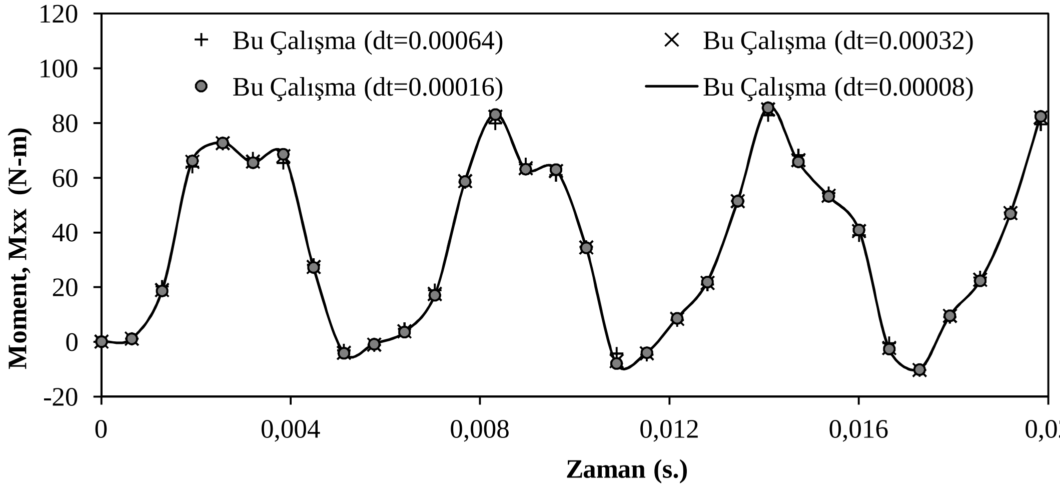
Şekil 6.29. $(45/-45)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi

Tabakalı plak için bu tezde önerilen metod ile farklı zaman artım miktarları için elde edilen çözümlerin durum 1'e benzer biçimde birbiri ile çakıştığı görülmektedir. Şekil 6.28 ve 6.29'un incelenmesinden $(45/-45)_4$ tabaka dizilimi için salınıma ait genlik ve periyotların (45/-45) tabaka dizilimi için bulunan genlik ve periyotlardan daha küçük olduğu görülmektedir.

Tabakalı plağın orta noktasındaki momentin zamanla değişimi, (45/-45) tabaka dizilimi için Şekil 6.30'da, $(45/-45)_4$ dizilimi için ise Şekil 6.31'de gösterilmiştir.



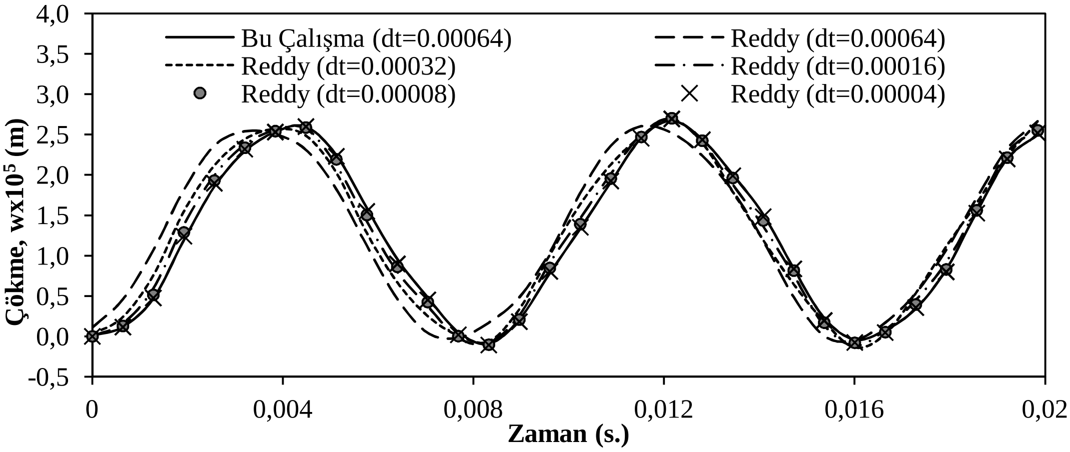
Şekil 6.30. (45/-45) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi



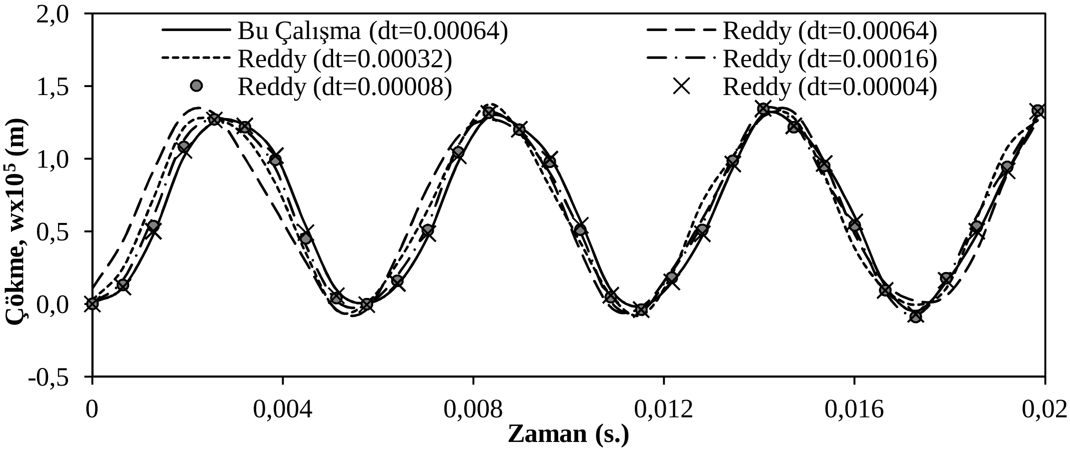
Şekil 6.31. $(45/-45)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Momentlere ait sayısal değerler incelendiğinde, çökmeye benzer şekilde farklı zaman artımları için elde edilen çözümlerin hepsinin çakıştığı görülmektedir. Şekil 6.30 ve 6.31'in incelenmesinden $(45/-45)_4$ tabaka dizilimi için plak periyotlarının (45/-45) tabaka diziliminkinden önemli ölçüde daha küçük olduğu, salınım genliklerinin ise çok az farkla küçük olduğu görülmektedir. Tabaka sayısı arttıkça moment salınımının periyotları önemli ölçüde azalırken genlikleri az da olsa küçülmektedir.

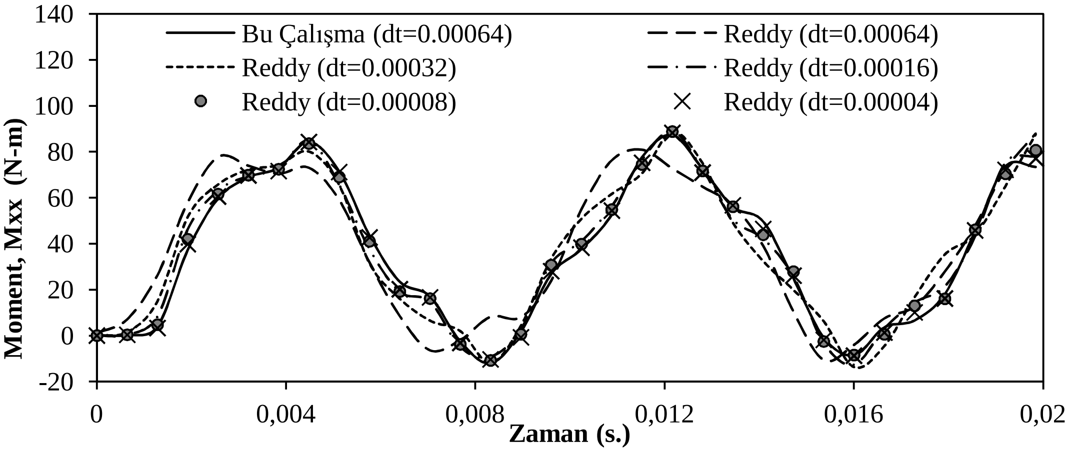
Bu çalışmada önerilen metod ve yarı-analitik metod kullanılarak farklı zaman artımları için adım tipi yükleme etkisinde elde edilen çözümler Şekil 6.32-6.35'te karşılaştırılmıştır. Yarı-analitik metod ile elde edilen çökme değerlerinin zamanla değişimi Şekil 6.32 ve 6.33'te, moment değerlerinin zamanla değişimleri ise, Şekil 6.34 ve 6.35'te gösterilmiştir.



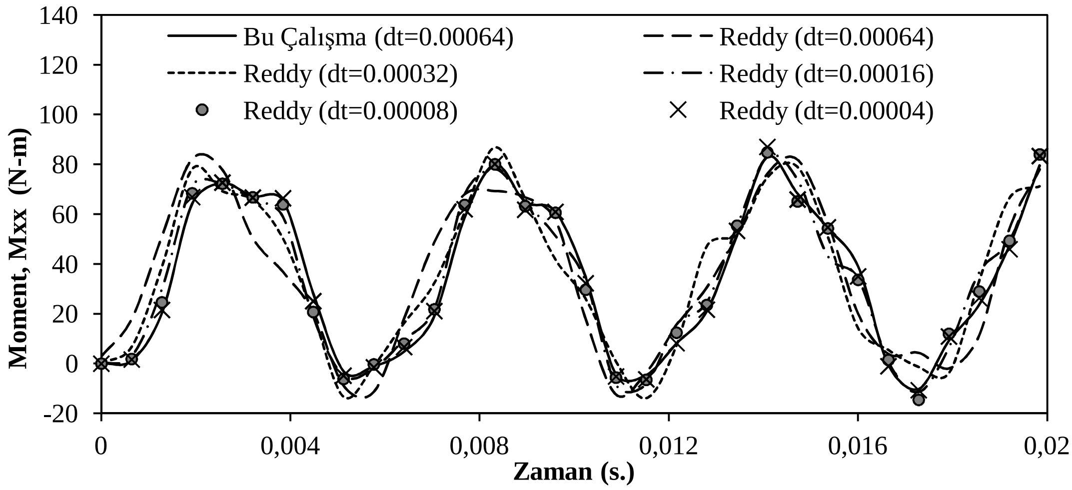
Şekil 6.32. (45/-45) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 6.33. $(45/\text{-}45)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



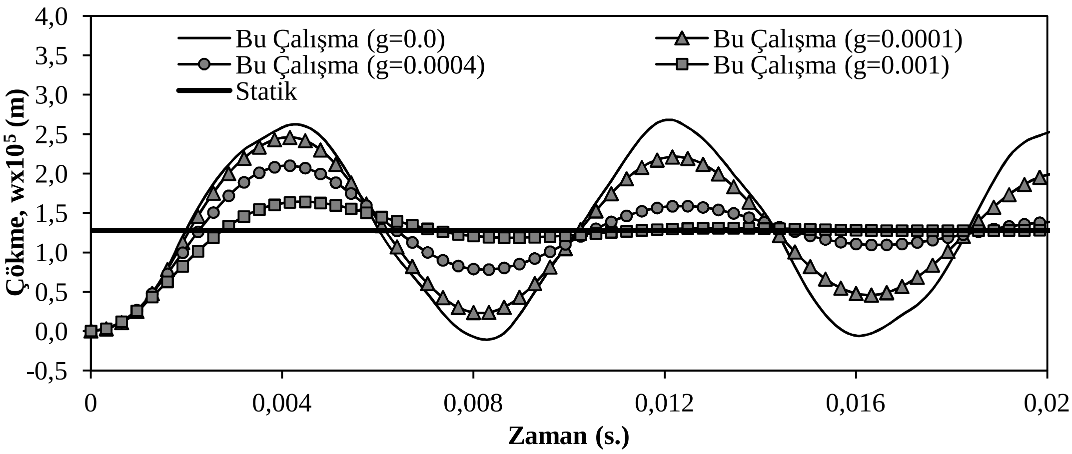
Şekil 6.34. (45/-45) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi



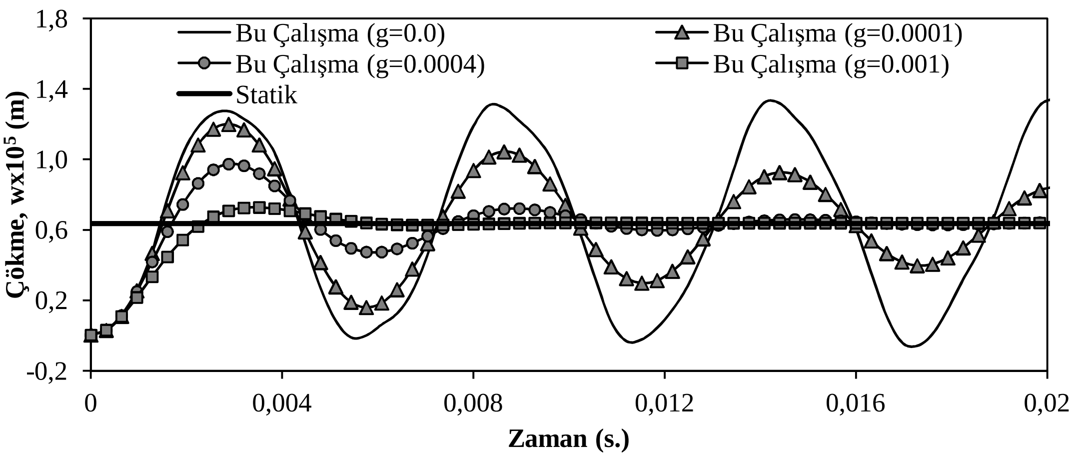
Şekil 6.35. $(45/-45)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Şekil 6.32-6.35'in incelenmesinden yarı-analitik yöntem sonuçlarının 0.00004 ve daha küçük zaman artım miktarları için tutarlı sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır. Şekillerden görüleceği üzere, Laplace uzayında çok kaba zaman artımı (0.00064 s.) kullanılarak elde edilen değerler ile, zaman uzayında yarı-analitik yöntemle çok daha sık zaman artımı (0.00004 s.) kullanılarak elde edilen değerlerin ancak birbiri ile örtüştüğü görülmektedir. Genel olarak bu tezde önerilen yöntem ile elde edilen sonuçlar yarı-analitik yöntemle elde edilen sonuçlara göre daha tutarlı olduğu görülmüştür.

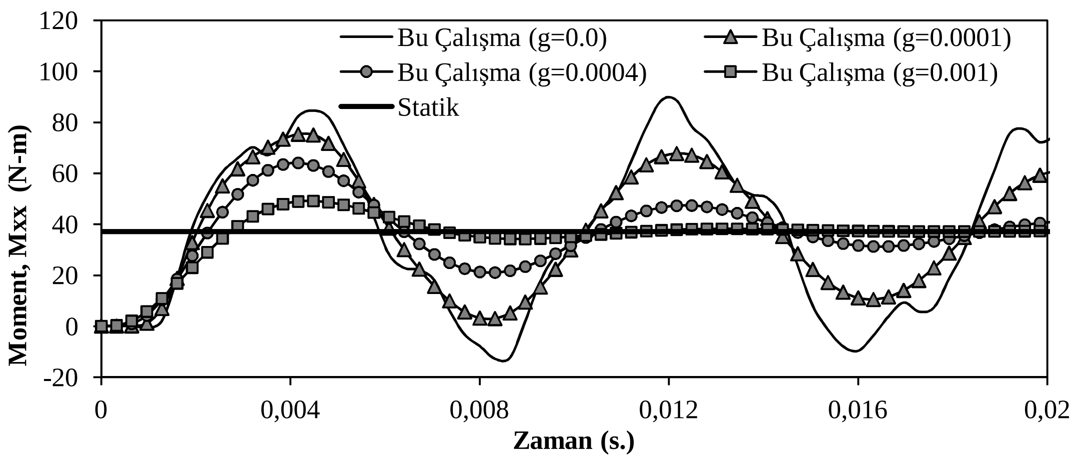
Tabakalı plakların viskoelastik davranışını incelemek amacıyla (45/-45) ve $(45/-45)_4$ tabaka dizilimleri için plakların viskoelastik dinamik analizleri yapılmış; elde edilen çökme ve moment değerlerinin zamanla değişimleri Şekil 6.36-6.39'da gösterilmiştir.



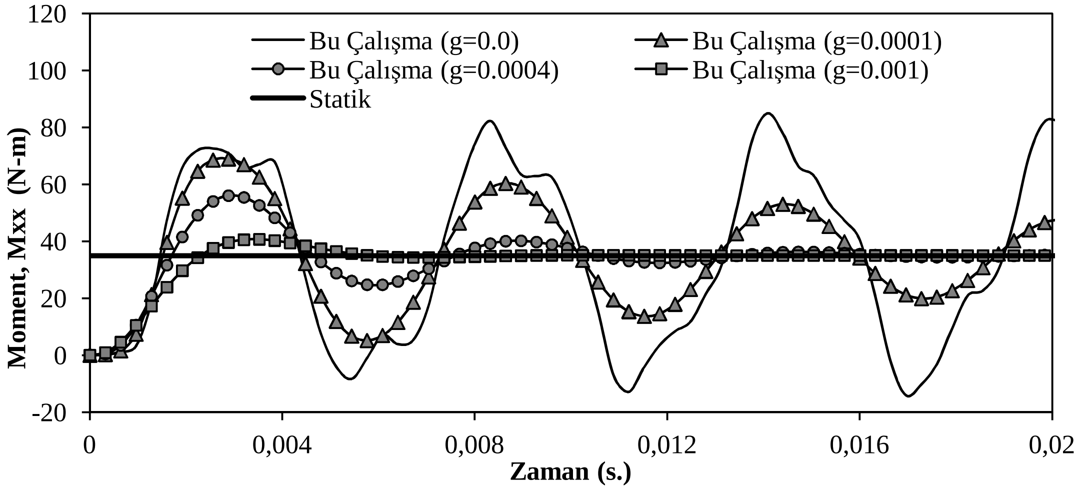
Şekil 6.36. (45/-45) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 6.37. $(45/-45)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



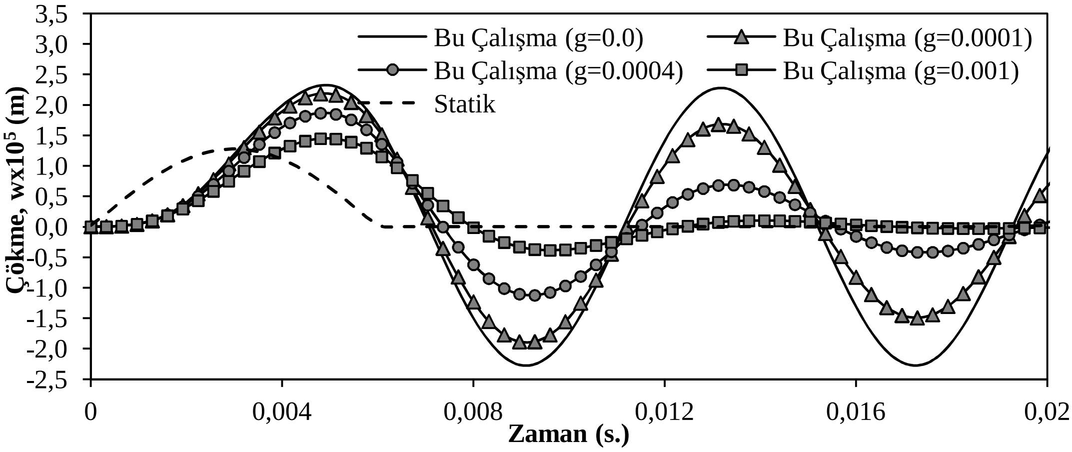
Şekil 6.38. (45/-45) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi



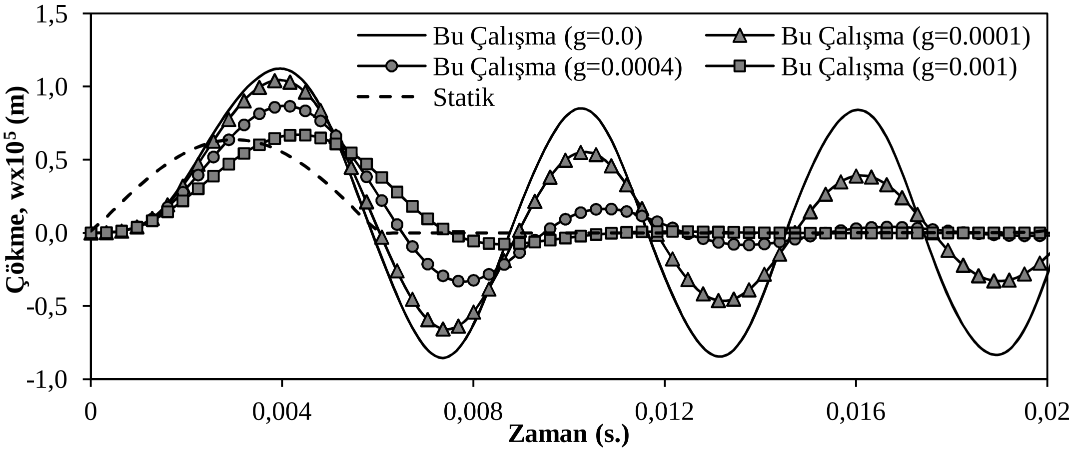
Şekil 6.39. $(45/-45)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Şekil 6.36-6.39'da statik çözüm, elastik-dinamik ve farklı sönüm durumları için viskoelastik çözümler de gösterilmiştir. Beklendiği gibi, elastik-dinamik davranışa ait çökme ve momentler statik değerler etrafında salınıma devam ederken; viskoelastik durumda ise, bu değerlere ait salınım zamanla statik değere yaklaşarak kaybolmaktadır. Şekil 6.36-6.39'dan anlaşılacağı gibi, sönüm oranının arttırılması durumunda salınıma ait genlikler statik değere daha çabuk yaklaşmaktadır. Ayrıca, viskoelastik malzemeye sahip tabakalı kalın plakların dinamik davranışları belirli bir süre sonra sönümlenerek statik değere ulaşmaktadır.

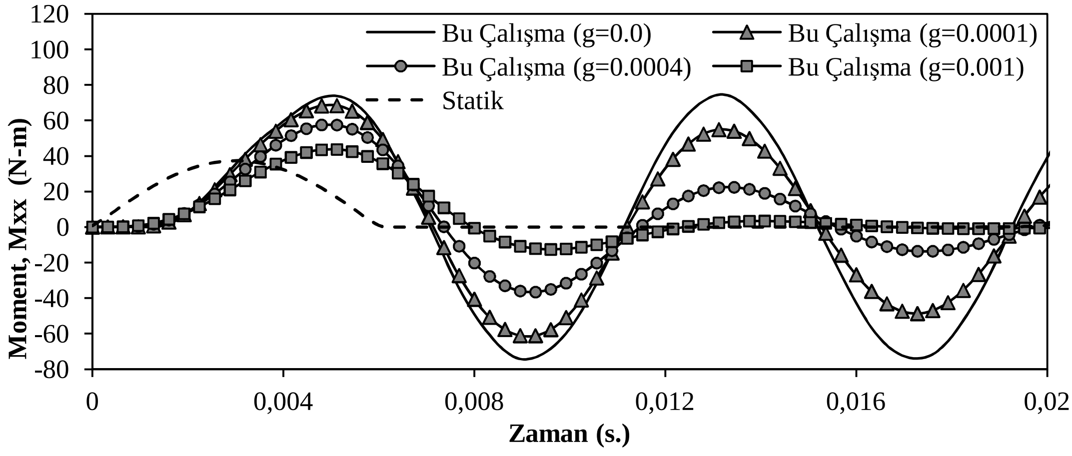
İkinci olarak; sinüzoidal yük etkisindeki tabakalı plakların viskoelastik davranışları incelenecektir. (45/-45) ve $(45/-45)_4$ tabaka dizilimleri için sinüzoidal yük etkisindeki plakların viskoelastik dinamik analizleri yapılmış; elde edilen çökme ve moment değerlerinin zamanla değişimleri Şekil 6.40-6.43'te gösterilmiştir.



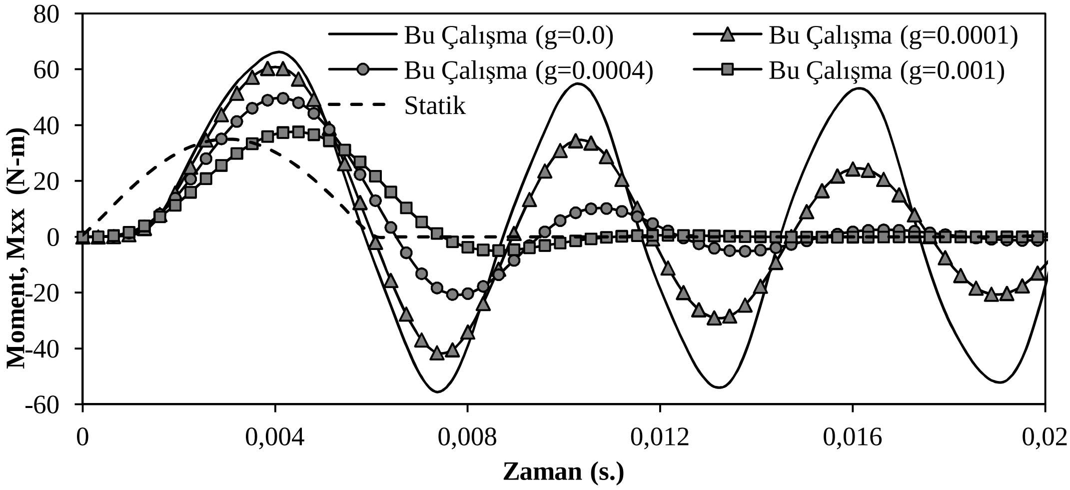
Şekil 6.40. (45/-45) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 6.41. $(45/\text{-}45)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki çökmenin zamanla değişimi



Şekil 6.42. (45/-45) tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi



Şekil 6.43. $(45/-45)_4$ tabaka dizilimi için plağın orta noktasındaki M_{xx} momentinin zamanla değişimi

Şekil 6.40-6.43'te statik çözüm, elastik-dinamik ve farklı sönüm durumları için viskoelastik çözümler de gösterilmiştir. Beklendiği gibi, elastik-dinamik davranışa ait çökme ve momentler statik değerler etrafında salınıma devam ederken; viskoelastik durumda ise, bu değerlere ait salınım zamanla statik değere yaklaşarak kaybolmaktadır. Şekil 6.40-6.43'ten anlaşılacağı gibi, sönüm oranının arttırılması durumunda salınıma ait genlikler statik değere daha çabuk yaklaşmaktadır. Ayrıca, viskoelastik malzemeye sahip tabakalı kalın plakların dinamik davranışları belirli bir süre sonra sönümlenerek statik değere ulaşmaktadır.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada viskoelastik malzemeye sahip ortotropik kalın plakların ve tabakalı ortotropik kalın plakların dinamik davranışları sonlu elemanlar metodu yardımıyla Laplace uzayında araştırılmıştır. Elde edilen çözümler, hem analitik hem de SEM ve direk integrasyon metodları yardımıyla elde edilen çözümler ile karşılaştırılmıştır. Plak veya tabakalı plak malzemesinin ortotropik ve lineer viskoelastik olduğu kabul edilmiştir. Sistemi idare eden hareket denklemi SEM kullanılarak zaman uzayında elde edilmiştir. Ardından, sistem hareket denklemine Laplace dönüşümü uygulanarak elde edilen lineer cebrik denklem takımı, bir dizi Laplace parametresi için dönüşmüş uzayda çözülmektedir. Bu tezde, viskoelastik malzeme için Kelvin modeli uygulanmıştır. Viskoelastik malzeme durumunda elastik sabitler, elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla, Laplace uzayında kompleks karşıtları ile yer değiştirmektedir. Laplace uzayından zaman uzayına dönüşümü için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm metodu kullanılmıştır. Bu tezde önerilen metodun esasları doğrultusunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Laplace dönüşüm uygulanarak, dinamik problem statik hale dönüşmekte ve böylece Laplace uzayında elde edilen lineer denklem takımı sayısal olarak çözülebilmektedir. Zaman uzayına geçiş için etkin bir sayısal ters Laplace dönüşüm metodu kullanılmıştır. Dinamik yükleme altındaki problemlerde sönüm etkisi Laplace uzayında kolay bir şekilde ele alınabilmektedir. Ayrıca, Laplace uzayındaki çözümlerde doğal titreşim periyotları ve mod şekillerine de ihtiyaç duyulmamaktadır.

Bu çalışmada önerilen metod ile farklı zaman artımları için elde edilen lineer elastik veya viskoelastik malzeme durumları için hesaplanan çökme ve eğilme momenti değerlerinin analitik sonuçlar ile çakıştığı görülmüştür.

Viskoelastik durumda çökme ve moment değerlerine ait salınım zamanla statik değere yaklaşarak kaybolmaktadır. Sönüm oranının arttırılması durumunda salınıma ait genlikler statik değere daha çabuk yaklaşmaktadır. Genel olarak, viskoelastik malzemeye sahip ortotropik kalın plakların veya tabakalı kalın plakların dinamik davranışları belirli bir süre sonra sönümlenerek statik değere ulaşmaktadır.

Tabakalı plaklarda, genel olarak, tabaka sayısının artması durumunda çökmeye ait salınım genlikleri ve periyotlarının azaldığı görülmektedir. Dik açılı tabakalara sahip plaklarda ise, tabaka sayısı arttıkça momente ait genlikler artarken, periyotlar ise küçülmektedir. Eğik açılı tabakalı plaklarda ise, tabaka sayısı arttıkça momente ait periyotlarda önemli ölçüde bir azalma görülürken, genliklerde az da olsa bir küçülme görülmektedir.

Sonlu elemanlar ve Newmark metodlarının birlikte kullanılmasıyla elde edilen çözümlerin doğruluğu zaman artım miktarının uygun olarak seçilmesine bağlıdır. Bu nedenle doğru zaman artım miktarının seçilmesi çok önemlidir. Bu tezde önerilen metod ile kaba zaman artım miktarları kullanılsa bile istenilen hassasiyete sahip çözümler elde edilebilmektedir. Bununla beraber, çözüm süreleri dikkate değer bir oranda azalmaktadır. Benzer şekilde Navier-Newmark metodunda da, zaman artım miktarlarının uygun seçilmesi halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmektedir.

Sonuç olarak, bu tezde önerilen çözüm metodunun adım adım integrasyon metodlarına göre çok daha etkin olduğu örnekler üzerinde gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

BARRETT, D.J., 1992. An anisotropic laminated damped plate theory. J. Sound Vib., 154:453–465.

BATHE, K.J., WILSON, E.L., 1976. Numerical methods in finite element analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

BESKOS, D.E., LEUNG, K.L., 1984. Dynamic response of plate systems by combining finite differences finite elements and Laplace Transform. Comput. Struct., 19:763–765.

BHIMARADDI, A., 1987. Static and transient response of rectangular plates. Thin-Walled Struct., 5:125–143.

BOLEY, B.A., WEINER, J.H., 1960. Theory of thermal stresses. John Wiley & Sons, New York.

CEDERBAUM G., ABOUDI, J., 1989. Dynamic response of viscoelastic laminated plates, J. Sound Vib., 133(2):225–238.

DANIEL, I. M., ISHAI, O., 1994. Engineering mechanics of composite materials. Oxford University Press. New York,

DURBIN, F., 1974. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to dubner and abate’s method. Comput. J., 17:371–376.

GHAFOORI, E., ASGHARI, M., 2010. Dynamic analysis of laminated composite plates traversed by a moving mass based on a first-order theory. Compos. struct., 92:1865-1876

KANT, T., ARORA, C.P., VARAIYA, J.H., 1992. Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and a mode superposition method. Compos. struct., 22(2):109–120.

KANT, T., VARAIYA, J.H., ARORA, C.P., 1990. Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes. Comput. struct., 36:401–420.

KHALILI, M.R., MALEKZADEH, K., MITTAL, R.K., 2005. A new approach to static and dynamic analysis of composite plates with different boundary conditions. Compos. struct., 69:149–155.

KHDEIR, A.A., 1995. Forced vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates with various boundary conditions. J. Sound Vib. 188:257–267.

KHDEIR, A.A., REDDY. J.N., 1989. On the forced motions of antisymmetric cross-ply laminated plates. Int. J. Mech. Sci., 31:499–510.

LEE, W.H., HAN, S.C., 2006. Free and forced vibration analysis of laminated composite plates and shells using a 9-node assumed strain shell element. Comput. Mech., 39:41–58.

LIEW, K.M., HE, X.Q., TAN, M.J., LIM, H.K., 2004. Dynamic analysis of laminated composite plates with piezoelectric sensor/actuator patches using the fsdt mesh-free method, Int. J. Mech. Sci., 46:411–431.

MAKHECHA, D.P., GANAPATHI, M., PATEL, B.P., 2001. Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to thermal/mechanical loads using an accurate theory. Compos. struct., 51:221–236.

MALEKZADEH, P., FIOUZ, A.R., RAZI, H., 2009. Three-dimensional dynamic analysis of laminated composite plates subjected to moving load, Compos. struct., 90:105–114.

MALLIKARJUNA, KANT, T., 1988. Dynamics of laminated composite plates with a higher order theory and finite element discretization. J. Sound Vib., 126(3):463–475.

MEIMARIS, C., DAY, J.D., 1995. Dynamic response of laminated anisotropic plates, Comput. struct., 55(2):269–278.

MINDLIN, R.D., 1951. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. J. Appl. Mech., 18: 31–38.

MOHEBPOUR, S.R., MALEKZADEH, P., AHMADZADEH, A.A., 2011. Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to a moving oscillator by FEM. Compos. struct., 93:1574–1583.

MOITA, J.S., ARAÚJO, A.L., MARTINS, P., MOTA SOARES, C.M., MOTA SOARES C.A., 2011. A Finite element model for the analysis of viscoelastic sandwich structures. Comput. Struct., 89:1874–1881.

NARAYANAN, G.V., 1979. Numerical operational methods in structural dynamics. Ph.D. thesis, University of Minnesota, Minneapolis.

NAYAK, A.K., SHENOI, R.A., MOY, S.S.J. 2004. Transient response of composite sandwich plates. Compos. struct., 64:249–267.

OCHOA, O. O., REDDY, J. N., 1992. Finite element analysis of composite laminates. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands. 206 p.

OWEN, D.R.J., LI, Z.H., 1988. Elastic-plastic dynamic analysis of anisotropic laminated plates, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 70(3):349–365.

PEKEL, H., KELEŞ, I., TEMEL, B., TÜTÜNCÜ, N., 2011. Transient response of FGM pressure vessels. In: Springer proceedings in Physics 139. Vibration problems ICOVP, 315–320.

PERVEZ, T., ZABARAS, N., 1992. Transient dynamic and damping analysis of laminated anisotropic plates using refined plate theory, Int. J. Numer. Meth. Eng. 33:1059–1080

REDDY, J.N., 1982. On the solutions to forced motions of rectangular composite plates. ASME J. Appl. Mech., 49:403–408.

REDDY, J.N., 1983. Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates. Int. J. Numer. Meth. Eng., 19(2):237–255.

REDDY, J.N., 2003. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. CRC Press, Boca Raton, 831 p

REDDY, J.N., 2006. An introduction to the finite element method, third ed. McGraw-Hill Book Company, New York,

REISMANN, H., LEE, Y., 1969. Forced motions of rectangular plates. Develop. Theor. Appl. Mech., 4:3–18.

STAAB, G.H., 1998. Laminar composites. Butterworth-Heinemann, Woburn, USA. 314 p.

TEMEL, B., 2003. Transient analysis of viscoelastic helical rods subject to time-dependent loads. Int. J. Solids Struct., 41:1605–1624.

TEMEL, B., ÇALIM, F.F., TÜTÜNCÜ, N., 2004. Quasi-static and dynamic response of viscoelastic helical rods. J. Sound Vib., 271: 921–935.

TEMEL, B., ŞAHAN, M.F., 2011. Forced vibration of orthotropic thick plate in the Laplace domain. In: 17th National Mechanic Congress, Elazıg, Turkey (in press).

TEMEL, B., ŞAHAN, M.F., 2013. Transient analysis of orthotropic viscoelastic thick plates in the Laplace domain, European Journal of Mechanics - A/Solids., 37:96–105.

WANG, Y.Y., LAM, K.Y., LIU, G.R., 2000. The effect of rotatory inertia on the dynamic response of laminated composite plate, Compos. struct., 48:265–273.

WANG, Y.Y., LAM, K.Y., LIU, G.R., 2001. A strip element method for the transient analysis of symmetric laminated plates, Int J Solids Struct., 38(2):241–259.

WANG, Y.Z., TSAI, T.J., 1988. Static and dynamic analysis of a viscoelastic plates by the finite element method. Appl. Acoust., 25:77–94.

WEN, P.H., 2008. The fundamental solution of mindlin plates resting on an elastic foundation in the Laplace domain and its applications. Int. J. Solids Struct., 45:1032–1050.

WEN, P.H., ADETORO, M., XU, Y., 2008. The fundamental solution of mindlin plates with damping in the Laplace domain and its applications. Eng. Anal. Boundary Elements, 32.870–882.

WEN, P.H., ALIABADI, M.H., 2009. Boundary element formulations for mindlin plate on an elastic foundation with dynamic load. Eng. Anal. Boundary Elements, 33:1161–1170.

WU, H.Y.T., CHANG, F.K., 1989. Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact. Comput. Struct., 31(3):453–466.

XIA, P., LONG, S., CUI, H., 2009. Elastic dynamic analysis of moderately thick plate using meshless LRPIM. Acta Mech. Sol. Sin., 22:116–124.

ZABARAS, N., PERVEZ, T., 1990. Viscous damping approximation of laminated anisotropic composite plates using the finite element method. Methods Appl. Mech. Engrg., 81:291–316.

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında Antakya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antakya'da tamamladı. 1995 yılında Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nü kazanarak 1999 yılında lisans öğrenimini tamamladı. Lisans öğreniminin ardından yüksek lisans öğrenimine yine Çukurova Üniversitesinde başladı. 2000 yılında Çukurova Üniversitesi Ceyhan Meslek Yüksek Okulu İnşaat Bölümü İnşaat Teknolojisi Programı'nda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Yüksek lisans öğrenimini 2002 yılında bitirdi. 2005 yılı içerisinde Askerlik hizmetini tamamlayarak Ceyhan Meslek Yüksek Okulu'ndaki görevine tekrar döndü. 2007 yılında Doktora öğrenimine başladı. Halen Ceyhan Meslek Yüksek Okulu'ndaki görevine devam etmektedir.

EKLER

EK 1: Durbin’in Modifiye Edilmiş Sayısal Ters Laplace Dönüşüm Metodu

Laplace dönüşüm uzayında bilinmeyenler bulunduktan sonra, zaman uzayına dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, Laplace uzayındaki çözümlerden zaman uzayına geçiş için Fast Fourier Transforma (FFT) dayalı Durbin’in (1974) modifiye edilmiş sayısal ters Laplace dönüşüm metodunu kullanılmıştır. Durbin’in modifiye edilmiş metoduna göre, ters Laplace dönüşüme ait formülasyon aşağıda özetlenmiştir:

$$f(t_j) \cong \frac{2e^{a\,j\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}Re\left\{\overline{F}(a)\right\} + Re\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\overline{F}(s_k)\, L_k\right) e^{(i\frac{2\pi}{N})jk}\right\}\right], \qquad \text{(Ek 1.1)}$$

$$(j = 0,1,2,\ldots,N-1)$$

Burada $s_k = a + ik\frac{2\pi}{T}$, $N = \frac{T}{\Delta t}$ olup s_k ise k *nıncı* Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. T çözüm aralığı olmak üzere, Δt zaman artım miktarıdır. İlgili literatürde sayısal ters Laplace dönüşüm için ‘aT’ değerinin 5 ile 10 değerleri arasında seçilmesi halinde iyi sonuçlar verdiği ifade edilmektedir. Bu çalışmadaki çözümlerde ‘aT’ değeri ‘6’ olarak dikkate alınmıştır. Narayanan (1979), Laplace uzayında elde edilen değerlerin Lanczos (L_k) faktörü ile çarpılarak modifiye edilmesi halinde çok daha iyi sonuçlar elde edildiğini belirtmektedir.

$$L_k = \frac{\mathrm{Sin}\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \qquad \text{(Ek 1.2)}$$

Burada k=0 için L_0=1 olarak alınmaktadır.

EK 2: Örnek Probleme ait Analitik Çözüm

Reismann ve Lee (1969), kenarlarından basit mesnetlenmiş dikdörtgen plağın analitik çözümünü aşağıdaki şekilde elde etmişlerdir. Plak geometrisi ve yükleme Şekil 6.1'de verilmiştir. Plağa ait sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$x=0 \text{ ve } x=1,\quad w=M_x=\psi_y=0$$
$$y=0 \text{ ve } y=\beta,\quad w=M_y=\psi_x=0 \qquad \text{(Ek 2.1)}$$

Aşağıdaki ifade, (2.1) denkleminde verilen sınır şartlarını sağlamaktadır.

$$W^{(mn)}(x,y) = A_{mn}\sin m\pi x\ \sin\frac{n\pi y}{\beta}$$
$${\psi_x}^{(mn)}(x,y) = B_{mn}\cos m\pi x\ \sin\frac{n\pi y}{\beta} \qquad \text{(Ek 2.2)}$$
$${\psi_y}^{(mn)}(x,y) = C_{mn}\sin m\pi x\ \cos\frac{n\pi y}{\beta}$$

Burada m,n=1,2,3,… şeklindedir. A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} katsayıları aşağıdaki denklemin çözülmesindene elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \left[k^2\pi^2\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right)-\Omega_{mn}^2\right] & \left[m\pi\frac{k^2}{\alpha}\right] & \left[\frac{n\pi}{\beta}\frac{k^2}{\alpha}\right] \\ \left[m\pi\frac{k^2}{\alpha}\right] & \left[\gamma^2\pi^2m^2+\xi^2\pi^2\frac{n^2}{\beta^2}+\frac{k^2}{\alpha}-\Omega_{mn}^2\right] & \left[\eta^2\pi^2\frac{mn}{\beta}\right] \\ \left[\frac{m\pi}{\beta}\frac{k^2}{\alpha}\right] & \left[\eta^2\pi^2\frac{mn}{\beta}\right] & \left[\xi^2\pi^2m^2+\gamma^2\pi^2\frac{n^2}{\beta^2}+\frac{k^2}{\alpha}-\Omega_{mn}^2\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A_{mn}}{\alpha} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{bmatrix} = 0 \quad (Ek\ 2.3)$$

Burada, matrise ait terimlerde yer alan katsayılar aşağıda verilmiştir.

$$k^2 = \frac{\kappa^2}{2(1+\nu)},\quad \xi^2 = \frac{1}{2(1+\nu)},\quad \alpha^2 = \frac{h^2}{12a^2}$$
$$\eta^2 = \frac{1}{2(1-\nu)},\quad \gamma^2 = \frac{1}{1-\nu^2},$$

Burada, katsayılar için $\kappa^2 = 0.86$, $\nu = 0.3$, $h = 0.2$, $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2}$ değerleri kullanılmıştır.

Çözüm için öncelikle (Ek 2.3) denkleminde verilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan 3 farklı Ω^2_{mn} değeri hesaplanmaktadır. A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} katsayıları elde edilen Ω^2_{mn} değerlerinin (Ek 2.3) denkleminde yerlerine konulması ile elde edilen denklemin eş zamanlı olarak (Ek 2.2) denkleminin aşağıda verilen (Ek 2.4) integralinde yerine konulması ile elde edilen denklem ile birlikte çözülmesi ile bulunur.

$$\int_0^1 \int_0^\beta \left(W^{(i)}W^{(i)} + \alpha^2 {\psi_x}^{(i)} {\psi_x}^{(i)} + \alpha^2 {\psi_y}^{(i)} {\psi_y}^{(i)}\right) dx dy = 1 \qquad \text{(Ek 2.4)}$$

Bu durumda zorlanmış titreşim probleminin çözümüne ait denklem aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned}
w(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3} W^{(mnr)}(x,y)\ q_{mnr}(t) \\
\psi_x(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3} {\psi_x}^{(mnr)}(x,y)\ q_{mnr}(t) \qquad \text{(Ek 2.5)} \\
\psi_y(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3} {\psi_y}^{(mnr)}(x,y)\ q_{mnr}(t)
\end{aligned}$$

Burada, yük terimi, $q_{mnr}(t)$ aşağıda şekilde elde edilmektedir.

$$q_{mnr}(t) = \frac{4\beta p_0 A_{mnr}}{\pi^2 mn\Omega^2_{mnr}}(1-\cos\Omega_{mnr}\, t)\sin mnu \sin\frac{n\pi v}{\beta}\sin\frac{m\pi\delta}{2}\ \sin\frac{n\pi\epsilon}{2\beta} \qquad (Ek\ 2.6)$$

(Ek 2.2) ve (Ek 2.6) denklemlerinin (Ek 2.5) denkleminde yerlerine konulması ile plağa ait çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{w}{p_0} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3} G_{mnr}(t)\ A_{mnr} \sin \mathrm{m}\pi x\ \sin\frac{n\pi y}{\beta}$$

$$\frac{\psi_x}{p_0} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3} G_{mnr}(t)\ B_{mnr} \cos \mathrm{m}\pi x\ \sin\frac{n\pi y}{\beta} \qquad \text{(Ek 2.7)}$$

$$\frac{\psi_y}{p_0} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3} G_{mnr}(t)\ C_{mnr} \sin \mathrm{m}\pi x\ \cos\frac{n\pi y}{\beta}$$

Burada $G_{mnr}(t)$ aşağıdaki ifadeden elde edilmektedir.

$$G_{mnr}(t) = \frac{4\beta A_{mnr}}{\pi^2 mn\Omega_{mnr}^2}(1-\cos\Omega_{mnr}\,t)\sin mnu \sin\frac{n\pi v}{\beta}\sin\frac{m\pi\delta}{2}\ \sin\frac{n\pi\epsilon}{2\beta} \qquad \text{(Ek 2.8)}$$

Burada, $G_{mnr}(t)$ için $u = 1/2,\ v = \beta/2,\ \delta = \epsilon = 2\theta,\quad x = 1/2,\ y = \beta/2$ değerleri kullanılmıştır. $\theta = h/a$ şeklinde elde edilmektedir. Plak eğilme momentleri ise aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$\frac{M_x}{p_0} = -\pi\gamma^2 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3}\left(mB_{mnr} + \nu\frac{n}{\beta}C_{mnr}\right) G_{mnr}(t) \sin \mathrm{m}\pi x\ \sin\frac{n\pi y}{\beta} \qquad \text{(Ek 2.9)}$$

$$\frac{M_y}{p_0} = -\pi\gamma^2 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{3}\left(\nu mB_{mnr} + \frac{n}{\beta}C_{mnr}\right) G_{mnr}(t)\ \sin \mathrm{m}\pi x\ \sin\frac{n\pi y}{\beta} \qquad \text{(Ek 2.10)}$$

Yukarıda özetlenen analitik çözüme ait program Mathematica 5.1 ile hazırlanmış ve aşağıda verilmiştir

```
Print["Basit mesnetli dikdortgen  plak(Reismann & Lee - Analitik cozum)"]

b = √2 ; a = 1; p0 = 1 ; ρ = 1; h = 0.2; ν = 0.3; El = 1
β = √2 ; κ = √0.86 ; u = 1/2; v = β/2; x = 1/2; y = β/2;
θ = h/a; δ = 2*θ; ϵ = 2*θ;

k = √(κ^2/(2*(1+ν))) ;
ξ = √(1/(2*(1+ν))) ;
α = √(h^2/(12*a^2)) ;
η = √(1/(2*(1-ν))) ;
γ = √(1/(1-ν^2)) ;

KK =   {{k^2*π^2*(m^2+n^2/β^2) - lam, m*π*k^2/α ,   n*π*k^2/(β*α)},
    {m*π*k^2/α,   γ^2*π^2*m^2 + (ξ^2* π^2*n^2)/β^2 + k^2/α^2 - lam,    η^2*π^2*m*n/β},
    {n*π*k^2/(β*α),   η^2*π^2*m*n/β,  ξ^2*π^2*m^2 + (γ^2* π^2*n^2)/β^2 +k^2/α^2 - lam }};

coz = Det[KK];
nsay = 20;
tmax = 81.92;
Δt = 0.32;
ni = (tmax/Δt) +1;
t = 0; tb = 0; i = 0;
dizi1 = Table[i*0, {i, ni}];
dizi2 = Table[i*0, {i, ni}];

NT = 0;
(Label[basla]; i = i + 1; w = 0; mom = 0;

 Do[ sol = Solve[coz == 0, lam];
  Lam = lam /. sol;

  KA =  {{k^2*π^2*(m^2+n^2/β^2) - Lam[[r]]  ,   m*π*k^2/α ,  n*π*k^2/(β*α)},
    {m*π*k^2/α, γ^2*π^2*m^2 + (ξ^2* π^2*n^2)/β^2 + k^2/α^2 - Lam[[r]],  η^2*π^2*m*n/β},
    {n*π*k^2/(β*α), η^2*π^2*m*n/β, ξ^2*π^2*m^2 + (γ^2* π^2*n^2)/β^2 +k^2/α^2 - Lam[[r]] }};

  Δ = {Ak, Bk, Ck} ;
  coe = Solve[KA.Δ == 0 , {Ak, Bk, Ck}];

  Cmn = Ck;
  Bmn = Bk /. coe;
  Bmn = Part[Bmn, 1];
  Amn = α*Ak /. coe;
  Amn = Part[Amn, 1];
```

```
intar =
      1
      ───
      m n
       (Sin[6.283185307179586` m]
          ((-0.056269769759819135` Amn^2 + 0.00018756589919939718` Bmn^2 -
               0.00018756589919939718` Cmn^2) n +
            (0.008955612003918069` Amn^2 - 0.000029852040013060236`
                Bmn^2 - 0.000029852040013060236` Cmn^2) Sin[6.283185307179586` n]) +
         m
          ((0.3535533905932738` Amn^2 + 0.0011785113019775796` Bmn^2 +
               0.0011785113019775796` Cmn^2) n +
            (-0.05626976975981914` Amn^2 - 0.00018756589919939718` Bmn^2 +
               0.00018756589919939718` Cmn^2) Sin[6.283185307179586` n]));
    int = intar - 1.0;
    ckat = Solve[int == 0., Ck];
    Cmnr = Ck /. ckat;
    Cmnr = Part[Cmnr, 1];
    Bmnr = Bmn /. Ck → Cmnr;
    Amnr = Amn /. Ck → Cmnr;

    gmnr = ((4 * β * Amnr) / (π^2 * m * n * (Lam[[r]]))) * (1 - Cos[(√Lam[[r]]) * t]) *
       Sin[m * π * u] * Sin[n * π * v / β] * Sin[m * π * δ / 2] * Sin[n * π * ϵ / (2 * β)] ;
    w = w + gmnr * Amnr * Sin[m * π * x] * Sin[n * π * y / β];
    mom = mom + (m * Bmnr + ν * n * Cmnr / β) * gmnr * Sin[m * π * x] * Sin[n * π * y / β];
                          {m, 1, nsay, 1}, {n, 1, nsay, 1} , {r, 1, 3, 1} ];
  w = w * β / p0;
  mom = -π * γ^2 * mom * β / p0;
  dizi1[[i]] = w;
  Print["i=,", i, " t=", t, " icin cokme=", dizi1[[i]]];
  dizi2[[i]] = mom;
  Print["i=,", i, " t=", t, " icin moment=", dizi2[[i]]];
  t = t + Δt;
  NT = NT + 1;
  If[t <= tmax, Goto[basla]];);

deplasman = Table[{(i - 1) * Δt, dizi1[[i]]}, {i, NT}];
moment = Table[{(i - 1) * Δt, dizi2[[i]]}, {i, NT}];
```

EK 3: Antisimetrik Tabakalı Kompozit Plakların Navier Çözümü

Kenarlarından basit mesnetlenmiş antisimetrik tabakalı kompozit plakların birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre yarı-analitik çözümü aşağıda verilmiştir (Reddy, 2003).

Durum 1: Dik Açılı Olarak Antisimetrik Tabakalanmış Kompozit Plak

Kenarlarından basit mesnetlenmiş tabakalı plak için BKDT'ye göre SS1 sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&u_0(x,0,t)=0, \quad u_0(x,b,t)=0, \quad v_0(0,y,t)=0, \quad v_0(a,y,t)=0,\\
&w_0(x,0,t)=0, \quad w_0(x,b,t)=0, \quad w_0(0,y,t)=0, \quad w_0(a,y,t)=0,\\
&f_x(x,0,t)=0, \quad f_x(x,b,t)=0, \quad f_y(0,y,t)=0, \quad f_y(a,y,t)=0,
\end{aligned} \qquad \text{(Ek 3.1)}
$$

Plağa ait deplasmanlar (Ek 3.1) denkleminde verilen sınır şartlarını sağlayacak şekilde çift Forurier serisi yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$
\begin{aligned}
u_0(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t)\cos\alpha x\ \sin\beta y\\
v_0(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t)\sin\alpha x\ \cos\beta y\\
w_0(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t)\sin\alpha x\ \sin\beta y\\
\emptyset_x(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t)\cos\alpha x\ \sin\beta y\\
\emptyset_y(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t)\sin\alpha x\ \cos\beta y
\end{aligned} \qquad \text{(Ek 3.2)}
$$

Burada $a = mp/a$, $b = np/a$ olup (U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}) ise sabitlerdir.

Plak üzerine etki eden yayılı yük, q, çift Fourier serisi yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$q(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t)\sin\alpha x\ \sin\beta y \qquad \text{(Ek 3.3)}$$

Burada Q_{mn} aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$Q_{mn} = \begin{cases} q_0 & sinuzoidal\ yük\ için \quad m = n = 1 \\ \dfrac{16q_0}{m\,n\,\pi^2} & uniform\ yük\ için \quad m,n = 1,3,5,\ldots.. \end{cases} \qquad \text{(Ek 3.4)}$$

Antisimetrik olarak dik açılı tabakalı plak için aşağıdaki rijitlik terimleri sıfır olarak dikkate alınır.

$A_{16}=0$, $A_{26}=0$, $A_{45}=0$, $B_{16}=0$, $B_{26}=0$, $D_{16}=0$, $D_{26}=0$, $I_1=0$ (Ek 3.5)

Antisimetrik olarak dik açılı tabakalı plakların Navier çözümü aşağıdaki denklem takımı ile elde edilir.

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & 0 & s_{24} & s_{25} \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn} \\ \ddot{V}_{mn} \\ \ddot{W}_{mn} \\ \ddot{X}_{mn} \\ \ddot{Y}_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(Ek 3.6)}$$

Burada s_{ij} ve m_{ij}

$s_{11} = (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \quad s_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta$

$s_{14} = (B_{11}\alpha^2 + B_{66}\beta^2), \quad s_{15} = (B_{12} + B_{66})\alpha\beta$

$s_{22} = (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \quad s_{24} = s_{15}$

$s_{25} = (B_{66}\alpha^2 + B_{22}\beta^2), \quad s_{33} = K(A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2)$

$s_{34} = KA_{55}\alpha, \quad s_{35} = KA_{44}\beta, \quad s_{44} = (D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + \mathrm{KA}_{55})$

$s_{45} = (D_{12} + D_{66})\alpha\beta, \quad s_{55} = (D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 + \mathrm{KA}_{44})$

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = I_0, \quad m_{44} = m_{55} = I_2 \tag{Ek 3.7}$$

olarak tarif edilmektedir. Eğilme momentleri ise aşağıdaki denklem ile hesaplanmaktadır.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\alpha U_{mn} \sin\alpha x \ \sin\beta y \\ -\beta V_{mn} \sin\alpha x \ \sin\beta y \\ (\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) \cos\alpha x \ \cos\beta y \end{Bmatrix}$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\alpha X_{mn} \sin\alpha x \ \sin\beta y \\ -\beta Y_{mn} \sin\alpha x \ \sin\beta y \\ (\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn}) \cos\alpha x \ \cos\beta y \end{Bmatrix} \tag{Ek 3.8}$$

Durum 2: Eğik Açılı Olarak Antisimetrik Tabakalanmış Kompozit Plak

Kenarlarından basit mesnetlenmiş tabakalı plak için BKDT'ye göre SS2 sınır şartları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{gathered} u_0(0,y,t)=0, \quad u_0(a,y,t)=0, \quad v_0(x,0,t)=0, \quad v_0(x,b,t)=0, \\ w_0(x,0,t)=0, \quad w_0(x,b,t)=0, \quad w_0(0,y,t)=0, \quad w_0(a,y,t)=0, \\ f_x(x,0,t)=0, \quad f_x(x,b,t)=0, \quad f_y(0,y,t)=0, \quad f_y(a,y,t)=0, \end{gathered} \tag{Ek 3.9}$$

Plağa ait deplasmanlar (Ek 3.9) denkleminde verilen sınır şartlarını sağlayacak şekilde çift Forurier serisi yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$u_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} U_{mn}(t)\sin\alpha x\ \cos\beta y$$

$$v_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t)\cos\alpha x\ \sin\beta y$$

$$w_0(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t)\sin\alpha x\ \sin\beta y \qquad \text{(Ek 3.10)}$$

$$\emptyset_x(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} X_{mn}(t)\cos\alpha x\ \sin\beta y$$

$$\emptyset_y(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Y_{mn}(t)\sin\alpha x\ \cos\beta y$$

Burada $a=mp/a$, $b=np/a$ olup (U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}) ise sabitlerdir.

Plak üzerine etki eden yayılı yük, q, çift Fourier serisi yardımıyla dik açılı tabakalı plakta verilen (Ek 3.3) denklemi ile edilmektedir. Antisimetrik olarak eğik açılı tabakalı plak için aşağıdaki rijitlik terimleri sıfır olarak dikkate alınır.

$A_{16}=0$, $A_{26}=0$, $A_{45}=0$, $B_{11}=0$, $B_{12}=0$, $B_{22}=0$, $B_{66}=0$,
$D_{16}=0$, $D_{26}=0$, $I_1=0$ (Ek 3.11)

Antisimetrik olarak eğik açılı tabakalı plakların Navier çözümü (Ek 3.6) denkleminde verilen denklem takımının aynısıdır. Denklem takımındaki s_{ij} ve m_{ij} terimleri aşağıda verilmektedir.

$$s_{11} = (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2),\quad s_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta$$
$$s_{13} = 0,\quad s_{14} = 2B_{16}\alpha\beta,\quad s_{15} = (B_{16}\alpha^2 + B_{26}\beta^2)$$
$$s_{22} = (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2),\quad s_{23} = 0,\quad s_{24} = s_{15},\quad s_{25} = 2B_{26}\alpha\beta$$
$$s_{33} = K(A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2),\quad s_{34} = KA_{55}\alpha,\quad s_{35} = KA_{44}\beta$$
$$s_{44} = (D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + \mathrm{KA}_{55})$$
$$s_{45} = (D_{12} + D_{66})\alpha\beta,\quad s_{55} = (D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 + \mathrm{KA}_{44})$$
$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = I_0,\quad m_{44} = m_{55} = I_2 \qquad \text{(Ek 3.12)}$$

Eğilme momentleri ise aşağıdaki denklem ile hesaplanmaktadır.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha U_{mn}\cos\alpha x\ \cos\beta y \\ \beta V_{mn}\cos\alpha x\ \cos\beta y \\ -(\beta U_{mn} + \alpha V_{mn})\sin\alpha x\ \sin\beta y \end{Bmatrix}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\alpha X_{mn}\sin\alpha x\ \sin\beta y \\ -\beta Y_{mn}\sin\alpha x\ \sin\beta y \\ (\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn})\cos\alpha x\ \cos\beta y \end{Bmatrix} \qquad \text{(Ek 3.13)}$$

(Ek 3.6) hareket denkleminin çözümü, Newmark -adım adım integrasyon-metoduyla yapılmaktadır.